Eine beweistheoretische Anwendung der $<_k$-Relation

von

STEFAN HARMELING
aus Legden

dem Institut für
mathematische Logik und Grundlagenforschung
am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
als Diplomarbeit eingereicht im

Mai 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Fünf Worte, kein Zitat!
Nichts?

In der Beweistheorie interessieren wir uns für die Stärke mathematischer Axiomensysteme. Ein mögliches Maß ist das Wachstumsverhalten der jeweiligen Π_2^0-SKOLEM-Funktionen[1]. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir unter diesem Aspekt die Theorien PA, ID_1, ID_2 ...[2] Bereits 1987 charakterisierte WILFRIED BUCHHOLZ [3] die beweisbar-rekursiven Funktionen[3] von ID_n mit einer schnell wachsenden Hierarchie[4], die über gewisse Hauptfolgen definiert wurde. Durch Veränderung dieser Hauptfolgen und durch Anpassung des Beweises von BUCHHOLZ erhielt TOSHIYASU ARAI [2] 1991 eine Charakterisierung dieser Funktionen durch eine langsam wachsende Hierarchie.
Im Jahre 1996 präsentiert ANDREAS WEIERMANN [10] eine neue Methode, um schnell wachsende Funktionenfolgen zu definieren: Jede Ordinalzahl $\alpha < \varepsilon_0$ identifizieren wir mit der zugehörigen CANTOR-Normalform zur Basis ω. Die Norm $N\colon \varepsilon_0 \to \omega$ zähle die Auftreten des Zeichens ω in α. Sei ferner $\Phi\colon \omega \to \omega$ eine Variante der ACKERMANN-Funktion mit gewissen Eigenschaften. Dann definieren wir für $\alpha, \beta < \varepsilon_0$ und $n < \omega$

$$\alpha <_n \beta \;:\Longleftrightarrow\; \alpha < \beta \;\;\&\;\; no(\alpha) \leq \Phi(no(\beta) + n).$$

Diese Relation approximiert die herkömmliche Relation $<$ auf ε_0, weil $\alpha <$

[1] Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik und Ax eine Menge von $\mathcal{L}$-Sätzen. Eine Funktion f heißt SKOLEM-Funktion zur Formel $\forall \vec{x} \exists y\, \Phi(\vec{x}, y)$, falls Φ eine $\mathcal{L}$-Formel ohne Prädikatskonstanten ist und im Standardmodell für alle $\vec{n}$ die Formel $\Phi(\vec{n}, f(\vec{n}))$ gilt. Die Π_2^0-SKOLEM-Funktionen von Ax sind die SKOLEM-Funktionen zu Formeln $\forall \vec{x} \exists y\, \Phi(\vec{x}, y)$ mit quantorenfreiem $\Phi(\vec{x}, y)$, für die $\mathsf{Ax} \models \forall \vec{x} \exists y\, \Phi(\vec{x}, y)$ gilt, vergleiche [8].

[2] PEANO-Arithmetik kürzen wir mit PA ab, für $n > 0$ die Theorien der n-fach iterierten induktiven Definitionen mit ID_n.

[3] Sei T KLEENES Normalformprädikat. Eine partiell rekursive Funktion f mit Kode e ist genau dann eine beweisbar-rekursive Funktion eines Axiomensystems Ax, falls $\mathsf{Ax} \models \forall \vec{x} \exists y\, \mathrm{T}(e, \vec{x}, y)$ gilt. Anstatt solche Funktionen zu betrachten, untersucht man allgemeiner die Π_2^0-SKOLEM-Funktionen. Aus der SKOLEM-Funktion zur Formel $\forall \vec{x} \exists y\, \mathrm{T}(e, \vec{x}, y)$ kann die Funktion f in primitiv-rekursiver Weise berechnet werden. Bei geeigneter Kodierung majorisiert sie auch die Funktion f.

[4] BUCHHOLZ nennt sie „closely related to the so-called HARDY hierarchy“, siehe Seite 140 in [3].

$\beta \iff \exists n\, \alpha <_n \beta$ gilt. Da aus $\alpha <_n \beta$ immer $no(\alpha) \leq \Phi(no(\beta) + n)$ folgt, ist für $\alpha < \varepsilon_0$

$$\theta\alpha n := \max\{k \in \omega : \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_k(\alpha_k <_0 \ldots <_0 \alpha_0 = \alpha + n + 1)\}$$

eine wohldefinierte schnell wachsende Funktion. Die besonderen Eigenschaften der Relation $<_n$ erleichtern den Beweis, daß die Funktionen $(\theta\alpha n)_{\alpha<\varepsilon_0}$ die beweisbar rekursiven Funktionen von PA majorisieren, vergleiche [10].
In ähnlicher Weise lassen sich langsam wachsende Funktionen definieren: Sei q eine primitiv rekursive Funktion. Dann nennen wir $no(\alpha) \leq q(no(\beta), k)$ die Normbedingung. Für Ordinalzahlen unterhalb von $\varepsilon_{\Omega+1}$[5] definieren wir eine Relation $<_k$, die wiederum, wie zuvor $<_n$, die gewöhnliche Relation $<$ approximiert:

$\alpha <_k \beta \quad :\iff \quad \alpha < \beta$ & „An bestimmten Stellen im Beweis von $\alpha < \beta$ gilt die der jeweiligen Stelle entsprechende Normbedingung.“

Diese „bestimmten Stellen“ sind gerade so gewählt, daß zum einen für abzählbare Ordinalzahlen α und β mit $\alpha <_k \beta$ die Normbedingung gilt, und zum anderen $\alpha < \Omega \leq \beta \implies \alpha <_k \beta$ richtig ist. Ferner sei

$$G_n\alpha := \max\{k \in \omega : \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_k(\alpha_k <_n \ldots <_n \alpha_0 = \alpha)\}.$$

Auf diese Weise hat Toshiyasu Arai in Anlehnung an Buchholz’ Artikel [4] und Weiermanns Artikel [9] langsam wachsende Funktionen definiert: Sei η_0 die Howard-Ordinalzahl[6]. In [1] zeigt er, daß die Funktionen $(G_n\alpha)_{\alpha<\eta_0}$ die beweisbar rekursiven Funktionen von PA und außerdem die der Fragmente $\mathsf{I\Sigma}_2, \mathsf{I\Sigma}_3 \ldots$ charakterisieren.
Diesem Ansatz folgend definieren wir in dieser Diplomarbeit langsam wachsende Funktionen, die die beweisbar-rekursiven Funktionen von PA, ID_1, $\mathsf{ID}_2 \ldots$ majorisieren.

Wie wir vorgehen

Wir nennen die Theorien $\mathsf{PA}, \mathsf{ID}_1, \mathsf{ID}_2 \ldots$ im folgenden $\mathsf{GID}_1, \mathsf{GID}_2, \mathsf{GID}_3 \ldots$ Sei $p > 0$. Zunächst definieren wir für $0 \leq v \leq p$ totale Funktionen ϑ_v auf On. Die v-te überabzählbare Kardinalzahl bezeichnen wir mit Ω_v. Um bei der Schnittelimination den Arbeiten von Buchholz [3] und Arai [2] folgen zu können, definieren wir ein Termsystem, das dem dort verwendeten sehr ähnlich ist:

[5] Sei Ω die erste überabzählbare Ordinalzahl. Dann ist $\varepsilon_{\Omega+1}$ die $(\Omega + 1)$-ste Epsilonzahl.
[6] Die Howard-Ordinalzahl ist die beweistheoretische Ordinalzahl von ID_1.

- $0 \in \mathrm{T}$
- $\gamma =_{NF} \xi + \eta \ \& \ \xi, \eta \in \mathrm{T} \implies \gamma \in \mathrm{T}$
- $\sigma \in \mathrm{T} \ \& \ 0 \leq v \leq p \implies \vartheta_v \sigma \in \mathrm{T}$

Dabei bedeute $\gamma =_{NF} \xi + \eta$, daß $\gamma = \xi + \eta$ ist und daß zusätzliche Bedingungen für ξ und η gelten. Schränken wir ϑ_v auf T ein, so erhalten wir Kollabierungsfunktionen $\vartheta_v \colon \mathrm{T} \to [\Omega_v, \Omega_{v+1}[$. Um später ein schärferes Ergebnis zu erhalten, definieren wir mit diesen Funktionen für $v \leq p$ durch

$$D_{p+1}\sigma := \sigma \text{ und } D_v\sigma := \vartheta_v D_{v+1}\sigma$$

Kollabierungsfunktionen

$$D_v \colon \mathrm{T} \to [\Omega_v, \Omega_{v+1}[,$$

für die im Falle $p > 1$ für $\gamma \geq \Omega_p$

$$D_0\gamma < \vartheta_0\gamma$$

gilt. Dann definieren wir so, wie wir es oben andeuteten, eine nicht-transitive Relation $<_k \subseteq \mathrm{T} \times \mathrm{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\alpha <_k \beta < \Omega_1 \implies no(\alpha) < q(no(\beta), k)$
- $\gamma <_k \Omega_{u+1} \iff \gamma < \Omega_{u+1}$

Wir erhalten wiederum eine Hierarchie von Funktionen:

$$G_k\alpha := \max\{n \in \omega : \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n(\alpha_n <_k \ldots <_k \alpha_0 = \alpha)\}$$

Damit können wir das Theorem formulieren, das bewiesen wird:

Theorem *Sei der Π^0_2-Satz $\forall x \exists y \Phi(x, y)$ in GID_p herleitbar. Dann gilt im Standardmodell:*

(a) $\exists l \forall m > l \exists n < G_0(D_0(D_p^m(D_p^m 0 + \iota) + 1)) \ \Phi(m, n)$

(b) $\exists l \forall m \exists n < G_m(D_0(D_p^l(D_p^l 0 + \iota) + 1)) \ \Phi(m, n)$

Dabei sei $\iota = \Omega_p + \ldots + \Omega_1$. Bevor wir den Beweis skizzieren, erweitern wir unsere Apparatur: Durch

$$\begin{aligned} \alpha \ll_k \beta \quad :\iff \quad & \alpha <_k \beta \ \& \ \forall l < p(AH_l\alpha \leq_k AH_l\beta) \\ & \& \ no(\alpha) < q(no(\beta), k) \end{aligned}$$

erhalten wir die Relation, entlang derer wir in unserem in Anlehnung an [2] zu definierenden infinitären System GID_p^∞ schließen wollen. Schreiben wir

$$k\,\big|\!\frac{\alpha}{r}\,\Gamma,$$

so gibt es in unserem infinitären System für die endliche Formelmenge Γ einen Beweisbaum, der nicht tiefer als α ist, dessen Zweige entlang der Relation $\ll_k$ verlaufen und in dem nur Formeln, deren Länge kürzer als r ist, geschnitten werden.
Wir werden in unseren Kalkül die (Ω_{u+1})-Regel verwenden. Sie wird mit Termen $f[*]$ formuliert, die mit einer freien Stelle $*$, einem Kontext, ausgerüstet sind. Diese Terme werden so definiert, daß unter anderem

$$\alpha \in \mathrm{T} \implies f[\alpha] \in \mathrm{T}$$

gilt. Um die Schnittelimination für GID_p^∞ durchführen zu können, zeigen wir, daß $\ll_k$ folgende Eigenschaften hat:

- $\gamma \neq 0 \implies 0 \ll_k \gamma$
- $\alpha \ll_k \beta \implies \gamma\#\alpha \ll_k \gamma\#\beta$
- $\alpha \ll_k \beta \implies D_u\alpha \ll_k D_u\beta$
- $\alpha \ll_k \beta \implies f[\alpha] \ll_k f[\beta]$

Speziell für den (Cut)-Schluß im Beweis des Eliminationslemmas brauchen wir

$$\alpha_0 \ll_k \alpha \implies D_p\alpha_0\#D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha,$$

für den (Ω_{u+1})-Fall des Kollabierungslemmas

$$v \leq u \implies D_v f[D_u f[0]] \ll_k D_v f[\Omega_{u+1}].$$

Der Beweis der letzten Eigenschaft erfordert viel Arbeit. Sie entspricht der folgenden Aussage bei der Untersuchung von Teilsystemen der Analysis mit Bar-Induktion, siehe Seite 21 in [6]:

> Corollary 5.4. If f is a fundamental function with $\Omega_{\tau+1} \in \mathrm{dom}(f)$, then $f(\psi\tau(f(0))) \lhd f(\Omega_{\tau+1})$.

Da unsere Relation $\ll_k$ im Gegensatz zu $\lhd$ nicht transitiv ist, beweisen wir dies etwas anders.

Danke!

Großer Dank gebührt Hochschuldozent Dr. Andreas Weiermann, bei dem ich diese Arbeit schrieb, der mir dieses interessante und aktuelle Thema vorschlug und der mir beim Bearbeiten jederzeit mit großem Überblick und Rat und Tat half, Dr. Benjamin Blankertz, der mir ebenfalls immer geduldig zuhörte und durch dessen Erklärungen ich vieles besser verstanden habe, den Herren Professoren Dr. Wolfram Pohlers und Dr. Justus Diller, bei denen ich in begeisternden Vorlesungen und spannenden Seminaren viel mathematische Logik lernte und deren unkomplizierte Art ich sehr schätze, Ingo Lepper, der mir mit unzähligen Tips und Tricks den Umgang mit LaTeX sehr erleichterte, allen, die am Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster arbeiten und es zu dem machen, was es ist, und nicht zuletzt meinen Eltern Marianne Harmeling und Franz Harmeling, die mir das Leben und Studieren in Münster möglich machen.

Versicherung

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen Quellen als die angegebenen benutzt habe.

1 Ein Ordinalzahlbezeichnungssystem T

Zunächst beschreiben wir die Ordinalzahlen, die wir für die Majorisierung der beweisbar-rekursiven Funktionen von ID_n benutzen werden.
Wir befinden uns in ZFC. On ist die Klasse der Ordinalzahlen, kleine griechische Buchstaben wie etwa α, β, γ, δ, η, ξ, σ bezeichnen bis auf weiteres Ordinalzahlen. Mit $\alpha < \beta$ meinen wir $\alpha \in \beta$, wobei sich die zugehörigen Variationen $>$, $\leq$ und $\geq$ hieraus leicht ableiten. In diesem Kapitel wollen wir jede Ordinalzahl α mit der Menge ihrer Vorgänger identifizieren:

$$\alpha = \{\gamma : \gamma < \alpha\}$$

$\xi + \eta$ und ω^α seien wie üblich definiert. AH ist die Klasse der additiven Hauptzahlen:

$$AH = \{\gamma > 0 : \forall \xi, \eta < \gamma(\xi + \eta < \gamma)\} = \{\omega^\alpha : \alpha \in On\}$$

Um das Bezeichnungssystem elegant formulieren zu können, ist uns folgende Normalform von Nutzen:

$$\gamma =_{NF} \xi + \eta \;:\Longleftrightarrow\; \gamma = \xi + \eta \;\;\&\;\; \exists \alpha(\xi = \omega^\alpha \;\;\&\;\; 0 < \eta < \omega^{\alpha+1})$$

Es gilt dann:

$$0 < \gamma \notin AH \;\Longleftrightarrow\; \exists \xi, \eta(\gamma =_{NF} \xi + \eta)$$

Dabei sind ξ und η eindeutig durch γ bestimmt. Mit p, u, v, k, l, m und n bezeichnen wir natürliche Zahlen, einschließlich der Null. $\aleph_0$ sei die kleinste unendliche und $\aleph_v$ die v-te überabzählbare Kardinalzahl. Ferner sei

$$\Omega_v := \begin{cases} 1 & \text{für } v = 0 \\ \aleph_v & \text{für } v > 0. \end{cases}$$

1.1 Ein paar Skolem-Mengen

Zu gegebenem p definieren wir für $v \leq p$ durch simultane Rekursion nach α Mengen $C_v(\alpha, \beta)$ von Ordinalzahlen und totale Kollabierungsfunktionen $\vartheta_v : On \to On$. Wir beginnen mit $v = p$ und gehen dann hinunter bis $v = 0$. Obwohl der Fall $p = 0$ der folgenden Definition keine Probleme bereitet, wollen wir diesen im Hinblick auf spätere Kapitel ausschließen.

Definition 1.1 Sei $v \leq p$.

$(C_1)\quad \gamma \in (\beta \cup \Omega_v) \cap \Omega_{v+1} \implies \gamma \in C_v(\alpha, \beta)$

$(C_2)\quad \gamma =_{NF} \xi + \eta \;\;\&\;\; \xi, \eta \in C_v(\alpha, \beta) \implies \gamma \in C_v(\alpha, \beta)$

$(C_3)\quad \sigma \in C_v(\alpha, \beta) \cap \alpha \implies \vartheta_v(\sigma) \in C_v(\alpha, \beta)$

$(C_4)\quad \sigma \in C_v(\alpha, \beta) \;\;\&\;\; v < u \leq p \implies \vartheta_u(\sigma) \in C_v(\alpha, \beta)$

$$(C_5)\quad \vartheta_v(\sigma) := \begin{cases} \Omega_v & \text{für } \sigma = 0 \\ \min\{\xi : C_v(\sigma, \xi) \cap \Omega_{v+1} \subseteq \xi \;\;\&\;\; \sigma \in C_v(\sigma, \xi)\} \cup \{0\} & \text{für } \sigma \neq 0 \end{cases}$$

Klausel (C_1) stellt an γ die zusätzliche Forderung $\gamma < \Omega_{v+1}$, da andernfalls Lemma 1.9(b) nicht beweisbar ist, wie wir im zugehörigen Beweis sehen werden. Die Bedingung $v < u \leq p$ gewährleistet, daß mit Klausel (C_4) nur im Falle $v < p$ neue Ordinalzahlen hinzugenommen werden.
v sei ab jetzt immer eine natürliche Zahl $\leq p$. Der Kürze halber schreiben wir $\vartheta_v\sigma$ statt $\vartheta_v(\sigma)$. Mit $|M|$ meinen wir die Mächtigkeit der Menge M. Desweiteren sei

$$\sup M_n := \bigcup_n M_n.$$

Die soeben definierten Mengen haben schöne Eigenschaften, wie das folgende Sublemma zeigt.

Sublemma 1.2

(a) $\quad \xi < \eta \implies C_v(\xi, \beta) \subseteq C_v(\eta, \beta) \;\;\&\;\; C_v(\alpha, \xi) \subseteq C_v(\alpha, \eta)$

(b) $\quad \beta < \Omega_{v+1} \implies |C_v(\alpha, \beta)| < \Omega_{v+1}$

(c) $\quad C_v(\alpha, \sup \gamma_n) = \sup C_v(\alpha, \gamma_n)$

Beweis
Die drei Aussagen lassen sich durch einfache Induktionen nach dem Aufbau von C_v beweisen.

In den Beweis des folgenden Satzes geht die Regularität von $\aleph_{v+1}$ ein. Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt regulär, falls

$$\forall M \subseteq \aleph_\alpha (|M| < \aleph_\alpha \rightarrow \exists \gamma \in \aleph_\alpha (M \subseteq \gamma))$$

gilt.

Lemma 1.3 $\sigma \in C_v(0, \Omega_{v+1}) \implies \vartheta_v \sigma < \Omega_{v+1}$

Beweis
Konstruieren wir ein $\gamma < \Omega_{v+1}$, welches die Eigenschaft

$$C_v(\sigma, \gamma) \cap \Omega_{v+1} \subseteq \gamma \ \ \& \ \ \sigma \in C_v(\sigma, \gamma)$$

besitzt, so gilt mit (C_5)

$$\vartheta_v \sigma \leq \gamma < \Omega_{v+1}.$$

Zu diesem Zwecke definieren wir unterhalb von Ω_{v+1} eine Folge $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ so, daß

$$\forall n (C_v(\sigma, \gamma_n) \cap \Omega_{v+1} \subseteq \gamma_{n+1})$$

ist.
Aus $\sigma \in C_v(0, \Omega_{v+1})$ folgt mit Sublemma 1.2(a) $\sigma \in C_v(\sigma, \Omega_{v+1})$. Also existiert nach Sublemma 1.2(c) ein $\gamma_0 < \Omega_{v+1}$ mit $\sigma \in C_v(\sigma, \gamma_0)$.
Sei γ_n schon konstruiert. Da die Mächtigkeit von $C_v(\sigma, \gamma_n)$ kleiner als $\aleph_{v+1}$ ist, vergleiche Sublemma 1.2(b), gibt es aufgrund der Regularität von $\aleph_{v+1}$ ein $\gamma_{n+1} < \Omega_{v+1}$ mit $C_v(\sigma, \gamma_n) \cap \Omega_{v+1} \subseteq \gamma_{n+1}$.
Setze $\gamma := \sup \gamma_n$. Die Regularität von $\aleph_{v+1}$ impliziert $\gamma < \Omega_{v+1}$. Aus der Stetigkeit im zweiten Argument von C_v folgt mit Sublemma 1.2(c):

$$\begin{array}{rcl} C_v(\sigma, \gamma) \cap \Omega_{v+1} & = & C_v(\sigma, \sup \gamma_n) \cap \Omega_{v+1} \\ & = & \sup C_v(\sigma, \gamma_n) \cap \Omega_{v+1} \\ & \subseteq & \sup \gamma_{n+1} \\ & = & \gamma \end{array}$$

Da $\gamma_0 \leq \gamma$ ist, gilt wegen Sublemma 1.2(a) $\sigma \in C_v(\sigma, \gamma)$. Damit entspricht γ unseren Wünschen.

Wir definieren jetzt eine Menge T von Ordinalzahlen, die wir für unsere beweistheoretische Untersuchung benutzen werden.

Definition 1.4

(T_1) $\quad 0 \in \mathrm{T}$

(T_2) $\quad \gamma =_{NF} \xi + \eta \ \ \& \ \ \xi, \eta \in \mathrm{T} \implies \gamma \in \mathrm{T}$

(T_3) $\quad \sigma \in \mathrm{T} \ \ \& \ \ 0 \leq v \leq p \implies \vartheta_v \sigma \in \mathrm{T}$

Diese Menge werden wir im folgenden auch Termsystem nennen, da alle Elemente ausgehend von der Null durch Summation und Anwendung der ϑ_v eindeutig darstellbar sind, wie wir spätestens nach Lemma 2.1 eingesehen haben werden.

Satz 1.5 $\gamma \in \mathrm{T} \implies \gamma \in C_v(0, \Omega_{v+1})$

Beweis durch Induktion nach $\gamma \in \mathrm{T}$
Es sind drei Fälle zu untersuchen:

- $\gamma = 0$
  Wegen $0 \in \Omega_{v+1}$ haben wir $0 \in C_v(0, \Omega_{v+1})$ mit Klausel (C_1).
- $\gamma =_{NF} \xi + \eta$
  Hier folgt die Behauptung sofort mit der Induktionsvoraussetzung.
- $\gamma = \vartheta_u \sigma$
  Dies ist der interessante Fall.
  - $u \leq v$
    Nach Induktionsvoraussetzung für u ist $\sigma \in C_u(0, \Omega_{u+1})$. Also folgt mit Lemma 1.3 $\vartheta_u \sigma < \Omega_{u+1} \leq \Omega_{v+1}$. Damit verhilft uns Klausel (C_1) zu $\vartheta_u \sigma \in C_v(0, \Omega_{v+1})$.
  - $u > v$
    Die Induktionsvoraussetzung für v liefert $\sigma \in C_v(0, \Omega_{v+1})$. Nach Klausel (C_4) gilt schließlich $\vartheta_u \sigma \in C_v(0, \Omega_{v+1})$.

Korollar 1.6 $\sigma \in \mathrm{T} \implies \Omega_v \leq \vartheta_v \sigma < \Omega_{v+1}$

Beweis
Gilt das Antezedenz des Satzes 1.5, so folgt der Sukzedenz des Lemmas 1.3. Nach Klausel (C_5) und (C_3) ist ferner $\Omega_v \leq \vartheta_v \sigma$.

1.2 Einige einfache Eigenschaften

In unserem Termsystem kommen alle natürlichen Zahlen vor, etwa

$$7 =_{NF} \vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0 + (\vartheta_0 0)))))) \in \mathrm{T}.$$

Mit Klausel (C_5) ist auch $\Omega_u = \vartheta_u 0 \in \mathrm{T}$.

Sublemma 1.7 *Für alle $\xi, \eta < \beta$ mit*

$$\exists \alpha(\xi = \omega^\alpha \;\; \& \;\; 0 < \eta < \omega^{\alpha+1})$$

gelte $\xi + \eta < \beta$. Dann ist β eine additive Hauptzahl.

Beweis
Sei $\gamma, \delta < \beta$. Beide Ordinalzahlen können wir in der CANTOR-Normalform zur Basis ω darstellen:

$$\gamma = \omega^{\gamma_0} + \ldots + \omega^{\gamma_m}$$

$$\delta = \omega^{\delta_0} + \ldots + \omega^{\delta_n}$$

Dabei gilt $\gamma_0 \geq \ldots \geq \gamma_m$ und $\delta_0 \geq \ldots \geq \delta_n$. Falls $\gamma + \delta > \delta$ ist, wählen wir j maximal mit der Eigenschaft $\gamma_j \geq \delta_0$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\omega^{\gamma_j} + \delta < \beta.$$

Schritt für Schritt erhalten wir so

$$\omega^{\gamma_0} + \ldots + \omega^{\gamma_j} + \delta = \gamma + \delta < \beta,$$

was zu beweisen war.

Sublemma 1.8

(a) $\quad \vartheta_v \sigma = C_v(\sigma, \vartheta_v \sigma) \cap \Omega_{v+1}$

(b) $\quad \vartheta_v \sigma \in AH$

Beweis
(a) Klausel (C_1) und Korollar 1.6 liefern die eine Inklusion $\subseteq$, Klausel (C_5) sichert die andere.
(b) Es seien $\xi, \eta < \vartheta_v \sigma = C_v(\sigma, \vartheta_v \sigma) \cap \Omega_{v+1}$ mit $\exists \alpha(\xi = \omega^\alpha \;\; \& \;\; 0 < \eta < \omega^{\alpha+1})$. Nach Klausel (C_2) ist $\xi + \eta \in C_v(\sigma, \vartheta_v \sigma)$. Weil $\Omega_{v+1} \in AH$ ist, gilt zudem $\xi + \eta < \Omega_{v+1}$. Dann gilt wegen (a) $\xi + \eta < \vartheta_v \sigma$. Mit Sublemma 1.7 folgt die Behauptung.

Sublemma 1.9

(a) $\quad \gamma =_{NF} \xi + \eta \implies (\gamma \in C_v(\alpha, \beta) \leftrightarrow \xi, \eta \in C_v(\alpha, \beta))$

(b) $\quad u > v \implies (\vartheta_u \sigma \in C_v(\alpha, \beta) \leftrightarrow \sigma \in C_v(\alpha, \beta))$

Beweis
(a) Sei $\gamma \in C_v(\alpha,\beta)$. Wie ist γ da hineingeraten? Durch Klausel (C_3) und (C_4) werden ausschließlich additive Hauptzahlen aufgenommen, vergleiche Sublemma 1.8(b). Also gilt $\gamma \in C_v(\alpha,\beta)$ wegen einer der Klauseln (C_1) und (C_2). Im ersten Fall sind ξ und η ebenfalls in $C_v(\alpha,\beta)$, da sie kleiner als γ sind, und im zweiten, weil ξ und η durch die Normalform eindeutig bestimmt sind.
(b) Ist $\vartheta_u\sigma$ in $C_v(\alpha,\beta)$, so kann dies nur nach Klausel (C_4) gelten. Klausel (C_1) kommt nicht in Frage, da in diesem Falle $\vartheta_u\sigma$ kleiner als Ω_{v+1} sein müßte.

Seien nun α, β, γ, δ, η, ξ und σ stets Elemente aus T.

1.3 Wann α kleiner als β ist

Beim Größenvergleich zweier additiver Hauptzahlen sind uns folgende Mengen von Teiltermen hilfreich.

Definition 1.10 Für eine Ordinalzahl γ aus T sei

$$AH_v\gamma := \begin{cases} \emptyset & \text{für } \gamma = 0 \\ AH_v\xi \cup AH_v\eta & \text{für } \gamma =_{NF} \xi + \eta \\ \{\gamma\} & \text{für } \gamma = \vartheta_u\sigma \;\;\&\;\; u \leq v \\ AH_v\sigma & \text{für } \gamma = \vartheta_u\sigma \;\;\&\;\; u > v. \end{cases}$$

Das folgende Sublemma ist eine einfache Folgerung aus Sublemma 1.8 und Korollar 1.6.

Sublemma 1.11

(a) $\quad AH_v\gamma \subseteq AH$

(b) $\quad AH_v\gamma < \Omega_{v+1}$

Für eine Menge M sei $M < \alpha$ gleichbedeutend mit $\forall\gamma \in M(\gamma < \alpha)$. Die Negation hiervon, $\exists\gamma \in M(\alpha \leq \gamma)$, schreiben wir $\alpha \leq M$.

Lemma 1.12 $\alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta) \iff AH_v\alpha < \vartheta_v\beta$

Beweis
Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach $\alpha \in$ T.

- $\alpha = 0$
  Dieser Fall ist klar.

- $\alpha =_{NF} \xi + \eta$
  Hier folgt mit Lemma 1.9(a) und der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

- $\alpha = \vartheta_u \sigma$
  Dies ist der interessante Fall.

  - $u \leq v$
    Da somit $\alpha < \Omega_{v+1}$ ist und nach Lemma 1.8 desweiteren $\vartheta_v\beta = C_v(\beta, \vartheta_v\beta) \cap \Omega_{v+1}$ gilt, folgt

    $$\alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta) \iff \alpha < \vartheta_v\beta.$$

    Wegen $AH_v\alpha = \{\alpha\}$ ist das das Verlangte.

  - $u > v$
    Nach Lemma 1.9(b) und der Induktionsvoraussetzung gilt

    $$\begin{aligned} \alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta) &\iff \sigma \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta) \\ &\iff AH_v\alpha = AH_v\sigma < \vartheta_v\beta, \end{aligned}$$

    womit alles gezeigt ist.

Satz 1.13 $\vartheta_v\alpha < \vartheta_v\beta \iff (\alpha < \beta \ \& \ AH_v\alpha < \vartheta_v\beta)$ *oder* $\vartheta_v\alpha \leq AH_v\beta$

Beweis
Wir unterscheiden drei Fälle:

- Gelte $\alpha < \beta$ und $AH_v\alpha < \vartheta_v\beta$.
  Mit Lemma 1.12 folgt $\alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta)$ aus dem zweiten Konjunktionsglied und hieraus wegen des ersten $\vartheta_v\alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta)$ mit (C_3). Nach Satz 1.3 gilt zudem $\vartheta_v\alpha < \Omega_{v+1}$. Also folgt:

  $$\vartheta_v\alpha \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta) \cap \Omega_{v+1}$$

  Sublemma 1.8(a) liefert damit die linke Seite der zu beweisenden Äquivalenz.

- Gelte $\vartheta_v\alpha \leq AH_v\beta$.
  Nach Definition von $\vartheta_v\beta$, vergleiche (C_5), ist $\beta \in C_v(\beta, \vartheta_v\beta)$. Lemma 1.12 liefert uns dafür $AH_v\beta < \vartheta_v\beta$. Zusammen mit der Voraussetzung ergibt das:

  $$\vartheta_v\alpha \leq AH_v\beta < \vartheta_v\beta$$

- Gelte die Negation der rechten Seite der Behauptung:

  $$(\beta \leq \alpha \text{ oder } \vartheta_v\beta \leq AH_v\alpha) \text{ und } AH_v\beta < \vartheta_v\alpha$$

  Falls $\beta \leq \alpha$ und $AH_v\beta < \vartheta_v\alpha$ gilt, so folgt wie im ersten Punkt unseres Beweises $\vartheta_v\beta \leq \vartheta_v\alpha$. Gehen wir im Falle $\vartheta_v\beta \leq AH_v\alpha$ wie im zweiten Punkt vor, so folgt ebenso $\vartheta_v\beta < \vartheta_v\alpha$. Damit ist alles gezeigt.

Korollar 1.6, Sublemma 1.8 und der vorhergehende Satz beantworten uns nun die Frage, wann α kleiner β ist:

Korollar 1.14 *$\alpha < \beta$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:*

- $\alpha = 0 \;\;\&\;\; \beta \neq 0$
- $\alpha = \vartheta_u\gamma \;\;\&\;\; \beta = \vartheta_v\delta$ *und einer der folgenden Fälle*
  - $u < v$
  - $u = v \;\;\&\;\; \gamma < \delta \;\;\&\;\; AH_u\gamma < \vartheta_v\delta$
  - $u = v \;\;\&\;\; \vartheta_u\gamma \leq AH_v\delta$
- $\alpha = \vartheta_u\gamma \;\;\&\;\; \beta =_{NF} \xi + \eta \;\;\&\;\; \alpha \leq \xi$
- $\alpha =_{NF} \xi + \eta \;\;\&\;\; \beta = \vartheta_v\delta \;\;\&\;\; \xi < \beta$
- $\alpha =_{NF} \gamma + \delta \;\;\&\;\; \beta =_{NF} \xi + \eta$ *und einer der folgenden Fälle*
  - $\gamma < \xi$
  - $\gamma = \xi \;\;\&\;\; \delta < \eta$

2 Die $<_k$-Relation auf T

Spätestens ab diesem Punkt der Arbeit sind kleine griechische Buchstaben mit und ohne Index Elemente aus T. Induktion nach γ meint in diesem Kapitel Induktion nach $\gamma \in \mathrm{T}$.

2.1 Eine Norm auf T

Von Null verschiedene Ordinalzahlen aus T, die nicht additive Hauptzahlen sind, haben nach Klausel (T_2) und Sublemma 1.9 eine eindeutige Summendarstellung. Das folgende Lemma zeigt, daß auch die Darstellung der additiven Hauptzahlen aus T durch die ϑ_v-Funktionen eindeutig ist.

Lemma 2.1 $\vartheta_u\alpha = \vartheta_v\beta \implies u = v \;\&\; \alpha = \beta$

Beweis
Da $\vartheta_u\alpha$ zwischen Ω_u und Ω_{u+1} liegt, folgt $u = v$. Angenommen α wäre kleiner als β. Wir zeigen $AH_u\alpha < \vartheta_u\alpha$. Denn dann gilt $\alpha < \beta$ und $AH_u\alpha < \vartheta_u\beta$, so daß mit Lemma 1.13 $\vartheta_u\alpha < \vartheta_v\beta$ folgt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Sei $\gamma \in AH_u\alpha$. Falls $\gamma < \Omega_u$ ist, folgt $\gamma < \vartheta_u\alpha$ sofort mit Korollar 1.6. Anderenfalls gilt trivialerweise $\gamma \leq AH_u\alpha$ und, da γ additive Hauptzahl ist, mit Satz 1.13 auch $\gamma < \vartheta_u\alpha$, was zu zeigen war.

Das Lemma und die obige Bemerkung zeigen, daß wir die Elemente aus T ausgehend von der Null durch Summation und Anwendung der ϑ_v eindeutig darstellen können. Ist die Norm $no(\alpha)$ die Anzahl der ϑ_v in dieser Darstellung von α, so ist sie mithin wohldefiniert. Das Beispiel aus Abschnitt 1.2 im Hinterkopf ist $no(n) = n$ trivial.

2.2 Eine Normbedingung

Die im folgenden zu spezifizierende Normbedingung soll Normen zweier Ordinalzahlen aus T vergleichen. Es sei

$$q(m, k) := p \cdot (k + 1) \cdot 5^{m+2}$$

eine Funktion auf natürlichen Zahlen. Wie wir sofort sehen, ist sie primitiv rekursiv. Dann nennen wir

$$no(\alpha) < q(no(\beta), k)$$

die *Normbedingung.* Die Norm von α wird also durch die Norm von β und der natürlichen Zahl k kontrolliert. Im Verlauf dieses Kapitels werden uns die im nächsten Lemma bewiesenen Eigenschaften von q hilfreich sein.

Lemma 2.2

(a) *q ist streng monoton wachsend in beiden Argumenten.*

(b) $m + q(n, k) \leq q(m + n, k)$

(c) $q(m, k) + q(m, k) + 2 \leq q(m + 1, k)$

(d) $m + m + p + 1 < q(m + 1, k)$

Für $n > 0$ und $m_0 \neq 0$ und $m_1 \neq 0$ und $\ldots$ und $m_n \neq 0$ gilt:

(e) $q(m_0, k) + \ldots + q(m_n, k) \leq q(m_0 + \ldots + m_n, k)$.

Beweis
(a) Wir beachten $p > 0$ und sehen die strenge Monotonie der Definition von q direkt an.
(b) Eine einfache Induktion nach m liefert die Behauptung. Dabei nutzen wir die strenge Monotonie von q im ersten Argument.
(c) Die folgende Abschätzung ergibt sich mit einfachster Arithmetik:

$$\begin{aligned} q(m, k) + q(m, k) + 2 &= 2 \cdot p \cdot (k + 1) \cdot 5^{m+2} + 2 \\ &\leq 5 \cdot p \cdot (k + 1) \cdot 5^{m+2} \\ &= q(m + 1, k) \end{aligned}$$

(d) Für diese Abschätzung nutzen wir $2 \cdot m + 1 < 5^{m+1} - 1$ und $p > 0$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot m + p + 1 &< 5^{m+1} - 1 + p \\ &\leq p \cdot (5^{m+1} - 1) + p \\ &\leq p \cdot (k + 1) \cdot 5^{m+1+2} \\ &= q(m + 1, k) \end{aligned}$$

(e) Es gilt $n+1 \leq 5^n$. Sei m_l das Maximum von $m_0, \ldots, m_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q(m_0,k)+\ldots+q(m_n,k) &\leq (n+1)\cdot p\cdot(k+1)\cdot 5^{m_l+2} \\ &\leq 5^n\cdot p\cdot(k+1)\cdot 5^{m_l+2} \\ &\leq p\cdot(k+1)\cdot 5^{m_0+\ldots+m_n+2} \\ &= q(m_0+\ldots+m_n,k) \end{aligned}$$

2.3 Die $<_k$-Relation auf T

Da bei der $<_k$-Relation die Normen der beteiligten Ordinalzahlen eine große Rolle spielen, werden die Summen sehr sorgfältig verglichen. Dazu ist uns für die Darstellung der Summen eine Variante[1] der CANTOR-Normalform nützlich. Es sei

$$\alpha =_{CNF} \alpha_0+\ldots+\alpha_m$$

genau dann, wenn

$$\alpha =_{NF} \alpha_0+\alpha_1 \ \ \& \ \ \alpha_1 \in AH \ \ \& \ \ m=1$$

oder

$$\alpha =_{NF} \alpha_0+\gamma \ \ \& \ \ \gamma =_{CNF} \alpha_1+\ldots+\alpha_m \ \ \& \ \ m>1$$

zutrifft. Zu jedem $\alpha \notin \{0\}\cup AH$ existieren dann durch α eindeutig bestimmte $\alpha_0,\ldots,\alpha_m$ mit

$$\alpha =_{CNF} \alpha_0+\ldots+\alpha_m.$$

Das Ergebnis des ersten Kapitels, Korollar 1.14, im Hinterkopf definieren wir nun die $<_k$-Relation:

Definition 2.3 $\alpha <_k \beta$ gelte genau dann, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:

- $\alpha = 0 \ \ \& \ \ \beta \neq 0$
- $\alpha = \vartheta_u\gamma \ \ \& \ \ \beta = \vartheta_v\delta$ und einer der folgenden Fälle

[1] Nach unserer Definition haben nur von Null verschiedene Ordinalzahlen, die nicht additive Hauptzahlen sind, eine CANTOR-Normalform. Dies hilft uns, die Fallunterscheidung bei der Definition der $<_k$-Relation einfach zu notieren.

- $u < v$ [verschiedene Stufen]
- $u = v = 0$ & $\gamma <_k \delta$ & $AH_u\gamma <_k \vartheta_v\delta$ & $no(\alpha) < q(no(\beta), k)$ [Unerreichbarkeit$_1$]
- $u = v > 0$ & $\gamma <_k \delta$ & $AH_u\gamma <_k \vartheta_v\delta$ [Unerreichbarkeit$_2$]
- $u = v$ & $\vartheta_u\gamma \leq_k AH_v\delta$ [Teilterm]

- $\alpha =_{CNF} \alpha_0 + \ldots + \alpha_m$ & $\beta = \vartheta_v\delta$ & und einer der folgenden Fälle
  - $v = 0$ & $\forall l \leq m(\alpha_l <_k \beta)$ & $no(\alpha) < q(no(\beta), k)$ [additive Hauptzahl$_1$]
  - $v > 0$ & $\forall l \leq m(\alpha_l <_k \beta)$ [additive Hauptzahl$_2$]
- $\alpha = \alpha_0 \# \ldots \# \alpha_n$ & $\beta =_{CNF} \beta_0 + \ldots + \beta_n$ & $\forall l \leq n(\alpha_l \leq_k \beta_l)$ & $\exists l \leq n(\alpha_l <_k \beta_l)$ [Multimengenvergleich]

$\xi \# \eta$ ist die natürliche Summe von ξ und η. Die letzte Klausel besagt somit, daß $\alpha < \beta$ ist, wenn $\beta =_{CNF} \beta_0 + \ldots + \beta_n$ ist, wir α irgendwie durch $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ als natürliche Summe darstellen können und die aufgeführten Bedingungen gelten. Unter einer Stufe, etwa der u-ten, verstehen wir das Intervall zwischen Ω_u einschließlich und Ω_{u+1} ausschließlich. Daß wegen $\Omega_0 = 1$ die 0 somit keiner Stufe zuzuordnen ist, soll uns nicht weiter stören. Satz 2.4 wird uns zeigen, daß für abzählbare α und β mit $\alpha <_k \beta$ die Normbedingung gilt. Der Beweis dieses Satzes erfordert, daß in der Definition von $\alpha <_k \beta$ an zwei Stellen die Normbedingung auftritt. Um auf einzelne Bedingungen der vorigen Definition Bezug zu nehmen, benutzen wir die Wörter in den eckigen Klammern als Namen. Der letzte Punkt ist dann etwa die *Multimengenvergleichsklausel* oder kurz der *Multimengenvergleich*.

2.4 Einfache Eigenschaften

Die soeben definierte Relation ist nicht transitiv, wie das folgende Beispiel zeigen wird. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \omega &:= \vartheta_0\vartheta_0 0 \\ \omega^\omega &:= \vartheta_0\omega \end{aligned}$$

Weil q streng monoton wachsend in beiden Argumenten ist, können wir ein k_0 so groß wählen, daß

$$2 = no(\omega) < q(no(\omega^\omega), k_0)$$

und außerdem

$$4 \leq q(no(\omega), k_0) - 1$$

gilt. Dann existiert ein $n > 0$, das maximal mit der Eigenschaft

$$2 \cdot n = no(\omega \cdot n) < q(no(\omega^\omega), k_0)$$

ist. Gemäß der Unerreichbarkeitsklausel gilt $\omega <_{k_0} \omega^\omega$ und mit der Additive-Hauptzahl$_1$-Klausel

$$\omega \cdot n <_{k_0} \omega^\omega.$$

Ferner folgt mit Multimengenvergleich

$$(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n <_{k_0} \omega \cdot n <_{k_0} \omega^\omega.$$

Da n maximal gewählt war, gilt jedoch nicht

$$(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n < q(no(\omega^\omega), k_0).$$

Also ist die Normbedingung für $(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n$ und ω^ω verletzt. Mit dem nächsten Satz sehen wir, da $(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n$ und ω^ω abzählbar sind, daß dann auch

$$(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n <_{k_0} \omega^\omega$$

falsch ist.

Satz 2.4 $\alpha <_k \beta < \Omega_1 \implies no(\alpha) < q(no(\beta), k)$

Beweis des Satzes
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $N\alpha + N\beta$.

- $\alpha = 0 \;\&\; \beta \neq 0$
  Dieser Fall ist einfach.
- $\alpha = \vartheta_0\gamma \;\&\; \beta = \vartheta_0\delta$. In der Unerreichbarkeitsklausel für $u = 0$ wird die Normbedingung explizit gefordert. Sei gemäß der Teiltermklausel $\alpha \leq_k \xi$ für ein $\xi \in AH_0\delta$. Da ξ ein echter Teilterm von β ist, gilt

  $$no(\xi) < no(\beta).$$

  Falls $\alpha = \xi$ ist, gilt folglich mit der Monotonie von q

  $$no(\alpha) = no(\xi) < no(\beta) \leq q(no(\beta), k).$$

  Anderfalls ist $\alpha <_k \xi$. Nach Sublemma 1.11 ist ξ kleiner als Ω_1. Somit ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar, und es folgt, da ξ ein echter Teilterm von β ist, mit der Monotonie von q

  $$no(\alpha) < q(no(\xi), k) \leq q(no(\beta), k).$$

- $\alpha =_{CNF} \alpha_0 + \ldots + \alpha_n \ \ \& \ \ \beta = \vartheta_0 \delta$
  In diesem Fall wird die Normbedingung explizit gefordert.

- $\alpha = \alpha_0 \# \ldots \# \alpha_n \ \ \& \ \ \beta =_{CNF} \beta_0 + \ldots + \beta_n$
  Da alle α_l und β_l kleiner als Ω_1 sind, folgt nach Induktionsvoraussetzung beziehungsweise aufgrund der strengen Monotonie von q für alle l

  $$no(\alpha_l) \leq q(no(\beta_l), k)$$

  und für ein l'

  $$no(\alpha_{l'}) < q(no(\beta_{l'}), k).$$

  Mit Lemma 2.2(e) folgt also:

  $$\begin{aligned} no(\alpha) &= no(\alpha_0) + \ldots + no(\alpha_n) \\ &< q(no(\beta_0), k) + \ldots + q(no(\beta_n), k) \\ &\leq q(no(\beta), k) \end{aligned}$$

Das folgende Lemma läßt sich nur beweisen, weil in der Stufenklausel keine Normbedingung steht. Wir werden es im Beweis des Lemmas 2.19 verwenden.

Lemma 2.5 $\gamma <_k \Omega_{u+1} \iff \gamma < \Omega_{u+1}$

Beweis
Der Größenvergleich mit $<_k$ berücksichtigt die Eigenschaften unserer Ordinalzahlen, die wir mit Korollar 1.14 zusammenfaßten. Es gilt also immer

$$\alpha <_k \beta \implies \alpha < \beta,$$

und somit die erste Implikation.
Durch Induktion nach γ zeigen wir die andere Richtung. $\gamma = 0$ ist trivial. Ω_{u+1} ist nach (C_5) gleich $\vartheta_{u+1}0$. Falls $\gamma \in AH$, kann somit $\gamma < \Omega_{u+1}$ nur gelten, da die beiden Zahlen auf verschiedenen Stufen liegen. Dann folgt sofort die Behauptung mit zugehöriger Klausel in obiger Definition. Ist γ eine Summe, so liegen auch alle Summanden unterhalb von Ω_{u+1}. Also folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung mit der Additive-Hauptzahl$_2$-Klausel.

2.5 Unsere Kollabierungsfunktionen

Wir wollen nun die Funktionen definieren, die wir zum Kollabieren von Ordinalzahlen benutzen werden. Am Ende dieses Abschnitts zeigen wir, daß für $p > 1$ die neuen Funktionen D_v auf kleinere Ordinalzahlen reflektieren als die Funktionen ϑ_v. Die neuen Funktionen werden durch Rekursion nach v von p hinab zur 0 definiert. Um im folgenden Ressourcen zu sparen, sei $D_{p+1}(\sigma) := \sigma$.

Definition 2.6 $D_v(\sigma) := \vartheta_v(D_{v+1}(\sigma))$

Bezüglich der Klammern bei $D_v(\sigma)$ gelte das gleiche wie bei $\vartheta_v(\sigma)$. Auch das Verhalten mit AH_v ist identisch:

Sublemma 2.7

$$AH_v D_u \sigma = \begin{cases} \{D_u\sigma\} & \textit{für } u \leq v \\ AH_v\sigma & \textit{für } u > v \end{cases}$$

Beweis
Die Behauptung ergibt sich direkt aus den beteiligten Definitionen.

Lemma 2.8

$$\begin{aligned} D_v\alpha < D_v\beta \quad &\Longleftrightarrow \quad (D_{v+1}\alpha < D_{v+1}\beta \;\;\&\;\; AH_v\alpha < D_v\beta) \\ &\qquad\quad \textit{oder } D_v\alpha \leq AH_v\beta \end{aligned}$$

Beweis
Nach Definition von D_v und nach Satz 1.13 gilt:

$$\begin{aligned} D_v\alpha < D_v\beta \quad &\Longleftrightarrow \quad \vartheta_v(D_{v+1}\alpha) < \vartheta_v(D_{v+1}\beta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (D_{v+1}\alpha < D_{v+1}\beta \;\;\&\;\; AH_v D_{v+1}\alpha < D_v\beta) \\ &\qquad\quad \textit{oder } D_v\alpha \leq AH_v D_{v+1}\beta \end{aligned}$$

Das vorige Sublemma impliziert damit die Behauptung. Für Mengen M und N sei $M \leq_k N$ gleichbedeutend mit $\forall\gamma \in M \exists\delta \in N(\gamma \leq_k \delta)$.

Lemma 2.9

(a) $D_1\alpha <_k D_1\beta \;\;\&\;\; AH_0\alpha \leq_k AH_0\beta \;\;\&\;\; no(D_0\alpha) < q(no(D_0\beta), k)$
$\Longrightarrow D_0\alpha <_k D_0\beta$

(b) $u > 0 \;\;\&\;\; D_{u+1}\alpha <_k D_{u+1}\beta \;\;\&\;\; AH_u\alpha \leq_k AH_u\beta$
$\Longrightarrow D_u\alpha <_k D_u\beta$

Beweis
(a) Mit der Unerreichbarkeitsklausel im Hinterkopf ist nur $AH_0\alpha <_k D_0\beta$ zu zeigen. Sei $\gamma \in AH_0\alpha$. Dann gilt $\gamma \leq_k AH_0\beta = AH_0D_1\beta$, vergleiche Sublemma 2.7, und $\gamma \in AH$. Mit der Teiltermklausel folgt dann $\gamma <_k D_0\beta$.
(b) Analog zu (a) mit Benutzung der Stufenklausel zeigen wir $AH_u\alpha <_k D_u\beta$. Das ist wie in (a) alles.

Wie zuvor versprochen, beweisen wir nun, daß die neuen Kollabierungsfunktionen für $p > 1$ bessere Arbeit liefern als die alten. Sei $\gamma \geq \Omega_p$. Wir werden

$$D_0\gamma < \vartheta_0\gamma$$

zeigen. Sei $\delta \in AH_0\gamma$. Weil $\delta \leq AH_0\gamma$ und $\delta \in AH$ gilt, folgt mit Satz 1.13

$$\delta < \vartheta_0\gamma,$$

insbesondere also mit Sublemma 2.7

$$AH_0D_1\gamma = AH_0\gamma < \vartheta_0\gamma.$$

Wegen $p > 1$ und $\gamma \geq \Omega_p$ sehen wir außerdem

$$D_1\gamma < \Omega_p \leq \gamma$$

ein. Beides zusammen ergibt mit Satz 1.13 die Behauptung.

2.6 Die kollabierbare Relation

Wir definieren jetzt die kollabierbare Relation $\ll_k$:

Definition 2.10

(a) $\alpha <_k^\gamma \beta \;:\Longleftrightarrow\; \alpha <_k \beta \;\;\&\;\; \forall l < p(AH_l\alpha \leq_k AH_l\beta \cup AH_l\gamma)$

(b) $\alpha \ll_k^{(1)} \beta \;:\Longleftrightarrow\; \alpha <_k^0 \beta \;\;\&\;\; no(\alpha) < q(no(\beta), k)$

(c) $\alpha \ll_k^{(l)} \beta \;:\Longleftrightarrow\; \exists \delta_0, \ldots, \delta_l(\alpha = \delta_0 \ll_k^{(1)} \ldots \ll_k^{(1)} \delta_l = \beta)$

Wir schreiben im folgenden häufig $\ll_k$ statt $\ll_k^{(1)}$. Mit $\alpha \underline{\ll}_k \beta$ meinen wir $\alpha \ll_k \beta$ oder $\alpha = \beta$. Wie $<_k$ ist auch $\ll_k$ nicht transitiv. Dazu besuchen wir das alte Beispiel und rechnen die AH_0-Mengen aus:

$$\begin{aligned} AH_0((q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n) &= \{1\} \\ AH_0(\omega \cdot n) &= \{\omega\} \\ AH_0(\omega^\omega) &= \{\omega^\omega\} \end{aligned}$$

Es gilt also auch mit dem k_0 des Beispiels

$$(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n \ll_{k_0} \omega \cdot n \ll_{k_0} \omega^\omega.$$

Da die Normbedingung für $(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n$ und ω^ω weiterhin verletzt ist, gilt somit nicht

$$(q(no(\omega), k_0) - 1) \cdot n \ll_{k_0} \omega^\omega.$$

Also ist $\ll_{k_0}$ nicht transitiv.
Die neue Relation hat außerdem nicht die Eigenschaft, daß mit $\alpha < \Omega_{u+1}$ auch $\alpha \ll_k \Omega_{u+1}$ gilt, vergleiche Lemma 2.5. Denn für $\alpha = 1$ ist $AH_0\alpha \leq_k AH_0\Omega_{u+1}$ falsch.
Im Beweis des nächsten Lemmas ist uns das folgende Sublemma hilfreich:

Sublemma 2.11

(a) $\quad no(\alpha) < q(no(\beta), k) \implies no(\gamma\#\alpha) < q(no(\gamma\#\beta), k)$

(b) $\quad no(\alpha) < q(no(\beta), k) \implies no(D_u\alpha) < q(no(D_u\beta), k)$

(c) $\quad \alpha <_k \beta \implies AH_p\alpha \leq_k AH_p\beta$

Beweis
(a), (b) Beides folgt sofort mit Lemma 2.2(b).
(c) Dies beweisen wir durch Induktion nach $\alpha <_k \beta$. Wir beachten dabei, daß $AH_p\alpha = \{\alpha\}$ gilt, falls α eine additive Hauptzahl ist.

Das folgende Lemma werden wir in späteren Kapiteln häufig anwenden.

Lemma 2.12

(a) $\quad \gamma \neq 0 \implies 0 \ll_k \gamma$

(b) $\quad \alpha \ll_k^{(l)} \beta \implies \gamma\#\alpha \ll_k^{(l)} \gamma\#\beta$

(c) $\quad \alpha \ll_k^{(l)} \beta \implies D_u\alpha \ll_k^{(l)} D_u\beta$

Beweis
(a) Da $AH_l0 = \emptyset$ ist, ist (a) klar.
(b) Wir beschränken uns auf die Behauptung $\alpha \ll_k \beta \implies \gamma\#\alpha \ll_k \gamma\#\beta$. Hieraus folgt die Behauptung durch Iteration. Mit einer Induktion nach $\alpha <_k \beta$ sehen wir

$$\alpha <_k \beta \implies \gamma\#\alpha <_k \gamma\#\beta.$$

Dabei verwenden wir in allen Fällen die Multimengenvergleichsklausel. Wegen $AH_l(\gamma\#\alpha) = AH_l\gamma \cup AH_l\alpha$ gilt $AH_l(\gamma\#\alpha) \leq_k AH_l(\gamma\#\beta)$. Lemma 2.11(a) stellt die Normbedingung sicher.
(c) Wir beweisen $\alpha \ll_k \beta \implies D_u\alpha \ll_k D_u\beta$. Die Behauptung folgt wiederum durch Iteration. Lemma 2.11(b) stellt hier die Normbedingung sicher. Durch Induktion nach u zeigen wir $D_u\alpha <_k D_u\beta$:

- $u = p + 1$
  In diesem Fall ist nichts zu zeigen.
- $0 < u \leq p$
  Nach Sublemma 2.11(c) gilt im Fall $u = p$ auch $AH_u\alpha \leq_k AH_u\beta$. Mit der Induktionsvoraussetzung und Lemma 2.9(b) folgt $D_u\alpha <_k D_u\beta$.
- $u = 0$
  Es gilt die Normbedingung $no(D_0\alpha) < q(no(D_0\beta), k)$. Also folgt mit Lemma 2.9(a) auch $D_0\alpha <_k D_0\beta$.

Ist $u \leq l$, so gilt $AH_l D_u\alpha = \{D_u\alpha\} \leq_k \{D_u\beta\} = AH_l D_u\beta$. Für $u > l$ ist $AH_l D_u\alpha = AH_l\alpha \leq_k AH_l\beta = AH_l D_u\beta$.

2.7 Kontexte

Später werden wir einen Kalkül mit (Ω_{u+1})-Regel benutzen. Zur Formulierung dieser Regel verwenden wir Terme mit einem Kontext. Der Einfachheit halber nennen wir diese Terme im folgenden *Kontext*. Was das ist, werden wir nun definieren. Sei id_u die Identität auf der Menge der Ordinalzahlen, die kleiner oder gleich Ω_{u+1} sind.

Definition 2.13
Wir definieren die Menge K der Kontexte:

- $id_u \in K \ \& \ typ(id_u) := u \ \& \ id_u[\alpha] := \alpha$
- $g \in K \implies \gamma\#g \in K \ \& \ typ(\gamma\#g) := typ(g) \ \& \ (\gamma\#g)[\alpha] := \gamma\#g[\alpha]$
- $g \in K \ \& \ v > typ(g) \implies D_v g \in K \ \& \ typ(D_v g) := typ(g) \ \& \ (D_v g)[\alpha] := D_v g[\alpha]$

Schreiben $g[\alpha]$, so sei immer implizit vorausgesetzt, daß $\alpha \leq \Omega_{typ(g)+1}$ gilt. Im folgenden seien f, g und h immer Kontexte. Punkt (a) des nächsten Lemmas zeigt, daß die Kontexte zur $\ll_k$-Relation passen.

Lemma 2.14

(a) $\alpha \ll_k \beta \implies f[\alpha] \ll_k f[\beta]$

(b) $f[\Omega_{typ(f)+1}] \geq \Omega_{typ(f)+1}$

Beweis
(a) Durch Induktion nach f zeigen wir mit Lemma 2.12 und der Induktionsvoraussetzung das Gewünschte.
(b) Auch dies beweisen wir per Induktion nach f. Im Falle $f = D_v g$ beachten wir $v > typ(f)$.

2.8 Weitere Eigenschaften

Um das nächste Lemma zu zeigen, benutzen wir

$$q(m,k) + q(m,k) + 2 \leq q(m+1,k).$$

Dies zeigten wir in Lemma 2.2(c). Hiermit können wir nun die folgende Behauptung zeigen, welche wir im Beweis des Eliminationslemmas brauchen werden.

Lemma 2.15 $\alpha_0 \ll_k \alpha \implies D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha$

Beweis
Um die Normbedingung zu zeigen, nutzen wir oben zitierte Eigenschaft von q:

$$\begin{aligned} no(D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0) &= no(\alpha_0) + no(\alpha_0) + 2 \\ &< q(no(\alpha),k) + q(no(\alpha),k) + 2 \\ &\leq q(no(D_p\alpha),k) \end{aligned}$$

Aus $\alpha_0 \ll_k \alpha$ folgt mit Lemma 2.12(c)

$$D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha.$$

Für $l < p$ ist $AH_l D_p\alpha_0 = AH_l(D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0)$. Somit gilt mit der Additive-Hauptzahl$_2$-Klausel

$$D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha.$$

Sei $D_p^0 0 := 0$ und $D_p^{l+1} := D_p^l D_p^0 0$. Zu dieser kleinen Definition beweisen wir ein kleines Lemma:

Lemma 2.16 $m < n \implies D_p^m 0 \ll_k D_p^n 0$

Beweis
Nach Lemma 2.12(a) gilt

$$0 \ll_k D_p^{n-m} 0.$$

Wenden wir m-fach Lemma 2.12(c) an, so sind wir fertig.

2.9 Tieferliegende Eigenschaften

Für das folgende Lemma ist es praktikabel, die Norm auf Kontexten zu definieren. Da die D_u Abkürzungen für geschachtelte ϑ_v sind, macht es Sinn, mit der Norm no die in einem Kontext f enthaltenen ϑ_v zu zählen: $no(id_u) := 0$, $no(\gamma\#g) := no(\gamma) + no(g)$, $no(D_v g) := 1 + no(g)$.

Lemma 2.17

(a) $\quad no(f[\alpha]) = no(f) + no(\alpha)$

(b) $\quad no(f[0]) < q(no(f[\Omega_{u+1}]), k)$

(c) $\quad no(D_0 f[0]) < q(no(D_0 f[\Omega_{u+1}]), k)$

(d) $\quad no(f[D_u f[0]]) < q(no(f[\Omega_{u+1}]), k)$

Beweis
(a) Das ist terratrivial.
(b) Dies folgt sofort mit (a) und der strengen Monotonie von q.
(c) Das ist eine Folgerung aus (b).
(d) Wir bemerken zunächst, daß $no(D_u\alpha) = p - u + 1 + no(\alpha)$ ist. Mit Lemma 2.2(d) folgt dann:

$$\begin{aligned}
no(f[D_u f[0]]) &= no(f) + no(f) + p - u + 1 \\
&\leq no(f) + no(f) + p + 1 \\
&< q(no(f) + 1, k) \\
&= q(no(f[\Omega_{u+1}]), k)
\end{aligned}$$

Lemma 2.18

(a) $\quad AH_v\alpha \leq_k \alpha$

(b) $\quad \alpha < \Omega_{v+1} \leq \beta \;\&\; \alpha \in AH \implies \alpha <_k \beta$

Beweis
(a) zeigen wir durch Induktion nach α.

- $\alpha = 0$
  Dieser Fall ist einfach.
- $\alpha =_{NF} \xi + \eta$
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $AH_v\xi \leq_k \xi$, also mit Multimengenvergleich auch $AH_v\xi \leq_k \xi + \eta$. Gleiches gilt für η. Damit ist $AH_v\alpha = AH_v\xi \cup AH_v\eta \leq_k \xi + \eta = \alpha$.
- $\alpha = D_u\sigma$
  Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:
  - $v < u$
    Nach Sublemma 1.11 ist $AH_v\sigma < \Omega_u$. Mit der Stufenklausel und Sublemma 2.7 gilt daher $AH_vD_u\sigma = AH_v\sigma \leq_k D_u\sigma$.
  - $v \geq u$
    Dann ist $AH_vD_u\sigma = \{D_u\sigma\}$.

(b) Falls $\beta \in AH$ ist, folgt die Behauptung sofort per Stufenklausel. Sonst existiert $\xi \in AH$ und ein η mit $\beta =_{NF} \xi + \eta$. Da Ω_{v+1} additive Hauptzahl ist, muß aufgrund von $\Omega_{v+1} \leq \beta$ zumindest der größte Summand von β größer oder gleich Ω_{v+1} sein. ξ ist nun eine additive Hauptzahl, so daß wir mit der Stufenklausel auf $\alpha <_k \xi$ schließen, und mit Multimengenvergleich auf $\alpha <_k \xi + \eta = \beta$.

Lemma 2.19 $\alpha < \Omega_{u+1}$ & $u \leq typ(f) \implies f[\alpha] <_k^\alpha f[\Omega_{u+1}]$

Beweis
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach f:

- $f = id_v$
  Gemäß Lemma 2.5 gilt $\alpha <_k \Omega_{u+1}$, insbesondere also $\alpha <_k^\alpha \Omega_{u+1}$.
- $f = \gamma\#g$
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt $g[\alpha] <_k g[\Omega_{u+1}]$, mit Multimengenvergleich $\gamma\#g[\alpha] <_k \gamma\#g[\Omega_{u+1}]$. Ferner folgt unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{array}{rcl} AH_l(\gamma\#g[\alpha]) & = & AH_l\gamma \cup AH_lg[\alpha] \\ & \leq_k & AH_l\gamma \cup AH_lg[\Omega_{u+1}] \cup AH_l\alpha \\ & = & AH_l(\gamma\#g[\Omega_{u+1}]) \cup AH_l\alpha \end{array}$$

- $f = D_v g$
  Nach Definition der Kontexte gilt $0 \leq u < v$. Mit der Induktionsvoraussetzung,
  $$g[\alpha] <_k^\alpha g[\Omega_{u+1}],$$
  zeigen wir
  $$D_v g[\alpha] <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$$
  durch Nebeninduktion nach v:
  - $v = p$
    Aus $g[\alpha] <_k g[\Omega_{u+1}]$ folgt zunächst $AH_p g[\alpha] \leq_k AH_p g[\Omega_{u+1}]$ mit Sublemma 2.11(c). Hiermit liefert uns Lemma 2.9(b) das Gewünschte: $D_p g[\alpha] <_k D_p g[\Omega_{u+1}]$.
  - $u < v < p$
    Es reicht
    $$AH_v D_{v+1} g[\alpha] <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$$
    zu zeigen. Denn dann folgt mit der Nebeninduktionsvoraussetzung $D_{v+1} g[\alpha] <_k D_{v+1} g[\Omega_{u+1}]$ und der Unerreichbarkeitsklausel $D_v g[\alpha] <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$. Nach Hauptinduktionsvoraussetzung wissen wir
    $$\begin{array}{rcl} AH_v D_{v+1} g[\alpha] & = & AH_v g[\alpha] \\ & \leq_k & AH_v g[\Omega_{u+1}] \cup AH_v \alpha \\ & = & AH_v D_{v+1} g[\Omega_{u+1}] \cup AH_v \alpha. \end{array}$$
    Sei $\gamma \in AH_v D_{v+1} g[\alpha]$. Dann ist γ eine additive Hauptzahl. Wir unterscheiden drei Fälle:
    - $\gamma < \Omega_{u+1}$. Wegen $u + 1 \leq v$ folgt $\gamma <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$ mit der Stufenklausel.
    - $\Omega_{u+1} \leq \gamma \leq_k AH_v \alpha$. Mit Lemma 2.18(a) und wegen $u+1 \leq v$ folgt zunächst $\gamma \leq AH_v \alpha \leq \alpha < \Omega_{u+1} \leq D_v g[\Omega_{u+1}]$ und hieraus mit Lemma 2.18(b) $\gamma <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$.
    - $\Omega_{u+1} \leq \gamma \leq_k AH_v D_{v+1} g[\Omega_{u+1}]$. Mit der Teiltermklausel folgt $\gamma <_k D_v g[\Omega_{u+1}]$.

Als nächstes zeigen wir die Behauptungen für die Koeffizientenmengen AH_l:

- $l < v$
  Mit Sublemma 2.7 und der Induktionsvoraussetzung folgt:
$$\begin{array}{rcl} AH_lD_vg[\alpha] & = & AH_lg[\alpha] \\ & \leq_k & AH_lg[\Omega_{u+1}] \cup AH_l\alpha \\ & = & AH_lD_vg[\Omega_{u+1}] \cup AH_l\alpha \end{array}$$
- $l \geq v$
  Eben sahen wir $D_vg[\alpha] <_k D_vg[\Omega_{u+1}]$. Da $AH_lD_vg[\alpha] = \{D_vg[\alpha]\}$ und $\{D_vg[\Omega_{u+1}]\} \subseteq AH_lD_vg[\Omega_{u+1}] \cup AH_l\alpha$ gilt, sind wir somit fertig.

Im Fall $f = D_vg$ des vorigen Beweises wird die Unerreichbarkeitsklausel ohne Normbedingung angewandt. Hier läßt sich die Kompliziertheit von α, nichts anderes mißt $no(\alpha)$, nicht kontrollieren. Dies ist der Grund, warum die Normbedingung in der $<_k$-Relation, Definition 2.3, nicht überall gefordert werden darf.
Das folgende Lemma wird eigentlich nur für den Fall $g = f$ gebraucht. Der Beweis erfordert die Verallgemeinerung. Dazu definieren wir

$$g \subseteq f \;:\Longleftrightarrow\; typ(g) = typ(f) \;\;\&\;\; \exists h \in K \forall \alpha \leq \Omega_{typ(g)+1}(h[g[\alpha]] = f[\alpha]).$$

Es gilt also auch $f \subseteq f$. Bevor wir jedoch zum Beweis des Lemmas schreiten, beweisen wir ein Sublemma:

Sublemma 2.20

(a) $u \leq typ(f) \implies AH_vf[0] <_k D_vf[\Omega_{u+1}]$

(b) $u \leq typ(f) \implies D_vf[0] <_k D_vf[\Omega_{u+1}]$

(c) $g \subseteq f \;\&\; typ(f) \geq v \implies AH_vg[\alpha] \subseteq AH_vf[\alpha]$

(d) $AH_v\alpha <_k D_v\alpha$

Beweis
(a) Mit Lemma 2.14(a) folgt $f[0] \ll_k f[\Omega_{u+1}]$, also $AH_vf[0] \leq_k AH_vf[\Omega_{u+1}]$, und wie im Beweis von Lemma 2.9 ergibt sich sofort $AH_vf[0] <_k D_vf[\Omega_{u+1}]$.
(b) Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach v:

- $v = p + 1$
  Nach Lemma 2.19 gilt $f[0] <_k f[\Omega_{u+1}]$.

- $0 < v < p+1$
  Teil (a) liefert $AH_v f[0] <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$ und von der Induktionsvoraussetzung erhalten wir $D_{v+1} f[0] <_k D_{v+1} f[\Omega_{u+1}]$. Das ergibt zusammen mit der Unerreichbarkeitsklausel $D_v f[0] <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$.

- $v = 0$
  Hier gehen wir wie im vorigen Punkt vor und beachten zusätzlich Lemma 2.17(c).

(c) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach f:

- $f = g$
  Dieser Fall ist terratrivial.

- $f = \gamma \# h$
  Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$AH_v g[\alpha] \subseteq AH_v \gamma \cup AH_v h[\alpha] = AH_v(\gamma \# h[\alpha]).$$

- $f = D_l h$
  Wegen der Induktionsvoraussetzung und $l > typ(f) \geq v$ folgt

$$AH_v g[\alpha] \subseteq AH_v h[\alpha] = AH_v f[\alpha].$$

(d) Sei $\gamma \in AH_v \alpha$. Also gilt $\gamma \leq_k AH_v \alpha = AH_v D_{v+1} \alpha$. Mit der Teiltermklausel oder mit der Stufenklausel folgt das Gewünschte.

Lemma 2.21 $typ(f) \geq u \geq v \ \ \& \ \ g \subseteq f \implies AH_v g[D_u f[0]] <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$

Beweis
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach g:

- $g = id_l \ \ \& \ \ l \geq u$
  Mit (b) und (a) des Sublemmas 2.20 folgt folgendes:
  - $u = v \quad AH_v D_u f[0] = \{D_u f[0]\} <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$
  - $u > v \quad AH_v D_u f[0] = AH_v f[0] <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$

- $g = D_l h \ \ \& \ \ l > u \geq v$
  Mit der Induktionsvoraussetzung gilt

$$AH_v D_l h[D_u f[0]] = AH_v h[D_u f[0]] <_k D_v f[\Omega_{u+1}].$$

- $g = \gamma \# h$
  Dies ist ausnahmsweise der interessante Fall. Wegen der Induktionsvoraussetzung und $AH_v(\gamma \# h[D_u f[0]]) = AH_v\gamma \cup AH_v h[D_u f[0]]$ ist nur $AH_v\gamma <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$ zu zeigen. Dies ist mit Punkt (c) und (d) des vorangegangenen Sublemmas leicht einzusehen:

$$\begin{array}{rcl} AH_v\gamma & \subseteq & AH_v\gamma \cup AH_v h[\Omega_{u+1}] \\ & = & AH_v g[\Omega_{u+1}] \\ & \subseteq & AH_v f[\Omega_{u+1}] \\ & <_k & D_v f[\Omega_{u+1}] \end{array}$$

Der Gebrauch der Teilmengenrelation im letzten Beweis ist der $\leq_k$-Relation unbedingt vorzuziehen, da man letztendlich auf die $<_k$-Relation schließen will, welche nicht transitiv ist, wie wir weiter oben eingesehen haben.

Lemma 2.22

(a) $\quad l < typ(f)\ \&\ AH_l\alpha \leq_k AH_l\beta \implies AH_l f[\alpha] \leq_k AH_l f[\beta]$

(b) $\quad l < typ(f)\ \&\ \gamma \# h \subseteq f \implies AH_l\gamma \subseteq AH_l f[\beta]$

(c) $\quad l < u \leq typ(g)\ \&\ AH_l\alpha \leq_k AH_l\beta\ \&\ g \subseteq f$
$\implies AH_l g[D_u f[\alpha]] \leq_k AH_l f[\beta]$

Beweis
(a) Die Behauptung können durch Induktion nach f zeigen. Im Fall $f = D_v g$ beachten wir $v > typ(f) > l$ und Sublemma 2.7.
(b) Dies läßt sich ebenfalls durch Induktion nach f zeigen. Der Induktionsanfang $f = \gamma \# h$ ist einfach. Der Fall $f = \delta \# g$ geht fast genauso. Im Fall $f = D_v g$ beachten wir $v > typ(f) > l$ und Sublemma 2.7.
(c) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach g:

- $g = id_{typ(g)}$
  Dieser Fall folgt mit Sublemma 2.7 und Teil (a).
- $g = D_v h$
  Nach Definition von g ist $l < typ(g) < v$. Sublemma 2.7 liefert in Kombination mit der Induktionsvoraussetzung

$$AH_l g[D_u f[\alpha]] = AH_l h[D_u f[\alpha]] \leq_k AH_l f[\beta].$$

- $g = \gamma \# h$
  Mit der Induktionsvoraussetzung und Teil (b) folgt

$$\begin{array}{rcl} AH_l g[D_u f[\alpha]] & = & AH_l\gamma \cup AH_l h[D_u f[\alpha]] \\ & \leq_k & AH_l\gamma \cup AH_l f[\beta] \\ & = & AH_l f[\beta]. \end{array}$$

Satz 2.23 $v \leq u \leq typ(f) < p \implies D_v f[D_u f[0]] \ll_k D_v f[\Omega_{u+1}]$

Beweis
Wir beweisen zunächst die Aussage für $<_k$ durch Induktion nach v. Gemäß Lemma 2.19 ist $f[D_u f[0]] <_k f[\Omega_{u+1}]$. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt, $v = p+1$. Wir erhalten $AH_v D_{v+1} f[D_u f[0]] = AH_v f[D_u f[0]] <_k D_v f[\Omega_{u+1}]$ mit Lemma 2.21. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir mit der Unerreichbarkeitsklausel auf

$$D_v f[D_u f[0]] <_k D_v f[\Omega_{u+1}],$$

wobei im Falle $v = 0$ Lemma 2.17(d) und Sublemma 2.11(b) zu beachten sind. Letztere stellen auch die Normbedingung für $\ll_k$ sicher. Für $l \geq v$ gilt mit dem eben gezeigten

$$AH_l D_v f[D_u f[0]] = \{D_v f[D_u f[0]]\} \leq_k \{D_v f[\Omega_{u+1}]\} = AH_l D_v f[\Omega_{u+1}].$$

Für $l < v$ gilt wegen $l < u \leq typ(f)$ und $AH_l 0 = \emptyset \leq_k AH_l \Omega_{u+1}$ mit Lemma 2.22(c)

$$AH_l D_v f[D_u f[0]] = AH_l f[D_u f[0]] \leq_k AH_l f[\Omega_{u+1}] = AH_l D_v f[\Omega_{u+1}].$$

Damit haben wir den vermutlich schwersten Brocken bewiesen.

2.10 Einige langsam wachsende Funktionen

Ein Tupel von Ordinalzahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ schreiben wir $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Letzteres nennen wir einen Abstieg entlang $<_k$ der Länge n, falls

$$\alpha_n <_k \ldots <_k \alpha_0$$

gilt. Für eine abzählbare Ordinalzahl α sei

$$\mathrm{T}_\alpha := \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) : \alpha_n <_k \ldots <_k \alpha_0 = \alpha\}$$

die Menge aller Abstiege von α. Die Menge T_α ist ein Baum mit der Wurzel (α). Da zum einen mit α auch alle anderen Ordinalzahlen im Baum T_α abzählbar sind und zum anderen für jedes γ die Menge $\{\beta : \beta <_k \gamma < \Omega_1\}$ endlich ist, denn für β und γ mit $\beta <_k \gamma < \Omega_1$ gilt die Normbedingung, ist der Baum endlich verzweigt. Der Baum ist fundiert, da wir entlang Ordinalzahlen absteigen und diese fundiert sind. Also folgt mit dem Lemma von KÖNIG, daß der Baum T_α endlich ist. Mithin ist die nächste Definition sinnvoll und die definierte Funktion wohldefiniert.

Definition 2.24 Für $\alpha < \Omega_1$ definieren wir wie TOSHIYASU ARAI in [1]

$$G_k\alpha := \max\{n \in \omega : \exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n(\alpha_n <_k \ldots <_k \alpha_0 = \alpha)\}$$

die Länge des längsten Abstiegs entlang $<_k$.

Für endliche Ordinalzahlen, also für natürliche Zahlen, stimmen $<_k$ und $\ll_k$ mit $<$ überein, wie wir nun sehen werden.

Sublemma 2.25

(a) $\quad m < n \iff m <_k n$

(b) $\quad m < n \iff m \ll_k n$

Beweis
(a) Zerlegen wir $m = 1\#\ldots\#1\#0\ldots\#0$ in n Summanden, so folgt wegen $0 <_k 1$ mit dem Multimengenvergleich $m <_k n$. Die Rückrichtung ist trivial.
(b) Die strenge Monotonie von q ergibt

$$m \leq q(m,k) < q(n,k)$$

und somit die geforderte Normbedingung. Außerdem ist $AH_l m = \{\vartheta_0 0\}$. Dies trifft für alle natürlichen Zahlen zu. Also folgt mit (a) die Behauptung. Wiederum ist die Rückrichtung trivial.

Lemma 2.26 *Für $\alpha < \Omega_1$ und $\beta < \Omega_1$ gilt:*

(a) $\quad \alpha <_k \beta \implies G_k\alpha < G_k\beta$

(b) $\quad \alpha \ll_k \beta \implies G_k\alpha \ll_k G_k\beta$

Beweis
(a) Sei $n = G_k\alpha$. Dann gibt es $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ derart, daß

$$\alpha_0 <_k \ldots <_k \alpha_n = \alpha <_k \beta$$

gilt. Also ist $G_k\alpha < G_k\beta$.
(b) Mit obigem Sublemma und Teil (a) folgt das Geforderte sofort.

3 Einige Theorien iterierter induktiver Definitionen

3.1 Die Sprache $\mathcal{L}$

Folgende Zeichen bilden die Grundlage der erststufigen Sprache $\mathcal{L}$:

- Logische Zeichen
  - Junktoren $\neg \wedge \vee$
  - Quantoren $\forall\ \exists$
  - abzählbar viele Zahlenvariablen $x\ x_0\ x_1\ y\ y_1\ y_2 \ldots z$
  - Hilfszeichen ( )
- Nichtlogische Zeichen
  - ein Konstantenzeichen 0
  - ein einstelliges Funktionszeichen S
  - Prädikatszeichen für alle primitiv-rekursiven Prädikate, unter ihnen $=$ und $<$

Die Menge der $\mathcal{L}$-Terme ist die kleinste Menge, die das Konstantenzeichen 0 und alle Zahlenvariablen enthält und die unter dem Funktionszeichen S abgeschlossen ist. $\mathcal{L}$-Terme bezeichnen wir mit $s, t, t_0, t_1 \ldots$ Die besonders wichtigen $\mathcal{L}$-Terme $0, \mathrm{S}0, \mathrm{SS}0 \ldots$ heißen *Numerale*. Um diese in Formeln zu bezeichnen, werden wir kleine lateinische Buchstaben wie etwa $u, v, j, n, m \ldots$ verwenden. Treten diese Zeichen im Text oder als Herleitungstiefen auf, so meinen wir damit die dem zugehörigen Numeral entsprechende echte natürliche Zahl.
Ist R ein n-stelliges Prädikatszeichen, so bezeichnen wir die Formeln der Gestalt $Rt_1 \ldots t_n$ und $\neg Rt_1 \ldots t_n$ als *arithmetische Primformeln.*[1] Solche Formeln nennen wir *wahr*, falls sie im Standardmodell gültig sind, und *falsch*, falls sie nicht wahr sind. Die Menge der $\mathcal{L}$-Formeln sei die kleinste Menge, die alle

[1]Da die primitiv rekursiven Prädikate unter Negation abgeschlossen sind, hätten wir auf Formeln der Gestalt $\neg Rt_1 \ldots t_n$ verzichten können. Im nächsten Abschnitt ist es aber notwendig, zwischen positivem und negativem Auftreten einer Primformel unterscheiden zu können. Deshalb ist es hilfreich, die Primformeln auch syntaktisch unter dem Negationszeichen abgeschlossen zu wissen.

arithmetischen Primformeln enthält und desweiteren unter Konjunktion, Disjunktion und Quantifizierung abgeschlossen ist. $\mathcal{L}$-Formeln bezeichnen wir in der Folge mit großen lateinischen Buchstaben wie etwa $A, A_0, A_1, \ldots, B, C$ oder F.
Mit $\neg A$ meinen wir die Formel, die aus A entsteht, wenn wir $\wedge$ und $\vee$, $\forall$ und $\exists$, $Rt_1 \ldots t_n$ und $\neg Rt_1 \ldots t_n$ vertauschen. Ferner verwenden wir als Abkürzung für $\neg A \vee B$ die Schreibweise $A \to B$, sowie $A \leftrightarrow B$ für $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

3.2 Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$

Sei nun X eine einstellige und Y eine zweistellige Prädikatsvariable. $\mathcal{L}(X, Y)$ ist die Sprache $\mathcal{L}$ erweitert um diese Prädikatsvariablen. Eine positive Operatorform ist eine $\mathcal{L}(X, Y)$-Formel $\mathfrak{A}(X, Y, y, x)$, deren einzige freie Variablen X, Y, y und x sind, und in der die Variable X nur positiv auftritt.[2]
Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$ erweitert $\mathcal{L}$ für jede positive Operatorform $\mathfrak{A}$ um eine zweistellige Prädikatskonstante $P^{\mathfrak{A}}$ und um eine dreistellige Prädikatskonstante $P^{\mathfrak{A}}_{<}$.
Mit großen griechischen Buchstaben wie etwa Γ und Δ bezeichnen wir endliche Mengen von $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$-Formeln. Abkürzend stehe Γ, A für $\Gamma \cup \{A\}$ und Γ, Δ für $\Gamma \cup \Delta$.
Ferner sei $\neg\Gamma$ die Menge der negierten Formeln aus Γ.

3.3 Ein Herleitungskalkül im Tait-Stil

Formeln und Axiome seien ab diesem Punkt immer $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$-Formeln. Die Herleitungsrelation definieren wir schnittfrei im Tait-Stil. Es gelte $\vdash \Gamma$ genau dann, wenn einer der folgenden Fälle gilt:

(Ax) $\neg A, A \in \Gamma$

($\wedge$) $A_0 \wedge A_1 \in \Gamma$ und $\vdash \Gamma, A_i$ für alle $i \in \{0, 1\}$

($\vee$) $A_0 \vee A_1 \in \Gamma$ und $\vdash \Gamma, A_i$ für ein $i \in \{0, 1\}$

($\forall$) $\forall x A \in \Gamma$ und $\vdash \Gamma, A$ und x erscheint nicht frei in Γ

($\exists$) $\exists x A \in \Gamma$ und $\vdash \Gamma, A_x(t)$

Dabei sei $A_x(t)$ die Formel, die sich aus A ergibt, wenn wir alle freien Auftreten von x in A durch t ersetzen. Variablen einer Formel, die nicht durch einen Quantor gebunden sind, heißen *frei*.

[2] In F tritt X nur positiv auf, falls F keine Teilformel der Gestalt $\neg Xt$ hat.

3.4 Die Theorie PA

Theorien wollen wir als Menge der zugehörigen mathematischen Axiome auffassen. Formuliert in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$ umfaßt die PEANO-Arithmetik, kurz PA,

- die definierenden Axiome für die primitiv rekursiven Prädikate, unter diesen auch die für $=$ und $<$, vergleiche [7],
- $\forall x(\neg\, 0 = \mathrm{S}x)$,
- $\forall x \forall y(\mathrm{S}x = \mathrm{S}y \to x = y)$ und
- für alle Formeln A die Formel $A_x(0) \wedge \forall x(A \to A_x(\mathrm{S}x)) \to \forall x A$.

3.5 Die Theorie GID_p

Wir verwenden zur Definition der stärkeren Theorie folgende Schreibweisen:

- $P^{\mathfrak{A}}_s t :\equiv P^{\mathfrak{A}} st$
- $P^{\mathfrak{A}}_{<s} t_0 t_1 :\equiv P^{\mathfrak{A}}_{<} s t_0 t_1$
- $\mathfrak{A}_s(X, x) :\equiv \mathfrak{A}(X, P^{\mathfrak{A}}_{<s}, s, x)$

Die Theorie GID_p erweitert PA um folgende Axiome:

$(P^{\mathfrak{A}}.1) \forall x(\mathfrak{A}_v(P^{\mathfrak{A}}_v, x) \to P^{\mathfrak{A}}_v x)$ für alle v

$(P^{\mathfrak{A}}.2) \forall x(\mathfrak{A}_v(F_x(\cdot), x) \to F) \to \forall x(P^{\mathfrak{A}}_v x \to F)$ für alle $v < p - 1$
und alle $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$-Formeln F

$(P^{\mathfrak{A}}.3) \forall x_0 \forall x_1(P^{\mathfrak{A}}_{<v} x_0 x_1 \leftrightarrow x_0 < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{x_0} x_1)$ für alle v

Den Theorien $\mathsf{PA}, \mathsf{ID}_1, \mathsf{ID}_2 \ldots$ entsprechen also $\mathsf{GID}_1, \mathsf{GID}_2, \mathsf{GID}_3 \ldots$
Wir sagen, eine Formelmenge Γ ist in GID_p herleitbar, abgekürzt $\mathsf{GID}_p \vdash \Gamma$, wenn es eine endliche Teilmenge Δ von GID_p gibt mit $\vdash \neg\Delta, \Gamma$.

4 Das infinitäre System GID_p^∞

Indem wir zur Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}$ eine neue Prädikatsvariable N hinzufügen, erhalten wir die Sprache $\mathcal{L}_{\mathsf{ID}}(N)$. Für geschlossene Formeln dieser Sprache werden wir das infinitäre System GID_p^∞ formulieren.
Die folgenden Definitionen nutzen aus, daß alle Formeln in negativer Normalform[1] sind.
Um in der unten verwendeten Schnittregel die Komplexität der Formeln zu messen, definieren wir die Länge $|F|$ einer Formel F:

- $|A| := |\neg A| := 0$, falls A eine arithmetische Primformel ist.
- $|Nt| := |\neg Nt| := |P^{\mathfrak{A}}st| := |\neg P^{\mathfrak{A}}st| := 0$
- $|P^{\mathfrak{A}}_{<}st_0t_1| := |\neg P^{\mathfrak{A}}_{<}st_0t_1| := 1$
- $|A \wedge B| := |A \vee B| := \max\{|A|, |B|\} + 1$
- $|\forall xA| := |\exists xA| := |A| + 1$

Ähnlich wie bei der Schnittregel müssen wir die Formeln für die Formulierung der (Ω_{u+1})-Regel sortieren. Hier interessiert uns der untere Index der verwendeten Fixpunkte $P^{\mathfrak{A}}_u$. Zu $v < p$ definieren wir wie folgt Formelmengen Pos_v:

- Arithmetische Primformeln und Formeln Nt gehören für alle v zu Pos_v.
- Für $0 < v$ seien Formeln $\neg Nt$ in Pos_v.
- Für $u < v$ seien Formeln $P^{\mathfrak{A}}_u t$, $P^{\mathfrak{A}}_{<u}t_0t_1$ und $\neg P^{\mathfrak{A}}_{<u}t_0t_1$ in Pos_v.
- Für $u + 1 < v$ seien Formeln $\neg P^{\mathfrak{A}}_u t$ in Pos_v.
- Mit A und B sind auch $A \wedge B$, $A \vee B$, $\forall xA$ und $\exists xA$ in Pos_v.

Definition 4.1 Die folgenden Schlüsse bezeichnen wir als *Grundschlüsse*:

$(\vee)$ $\quad A_i \vdash A_0 \vee A_1$ für $i \in \{0, 1\}$

$(\wedge)$ $\quad A_0, A_1 \vdash A_0 \wedge A_1$

[1] Eine Formel F ist in negativer Normalform, wenn das Zeichen $\neg$ in F nur direkt vor solchen Teilformeln steht, die Primformeln sind.

($\exists$) $\quad A_x(n) \vdash \exists x A$

($\forall$) $\quad (A_x(n))_{n\in\omega} \vdash \forall x A$

($P^{\mathfrak{A}}_{<}$) $\quad P^{\mathfrak{A}}_j n \vdash P^{\mathfrak{A}}_{<u} jn$ für $j < u$

($\neg P^{\mathfrak{A}}_{<}$) $\neg P^{\mathfrak{A}}_j n \vdash \neg P^{\mathfrak{A}}_{<u} jn$ für $j < u$

Ist $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ ein Grundschluß, so gilt $\forall i \in I(|A_i| < |A|)$. Dies wird im Reduktionslemma ausgenutzt. Für die Formel, die aus A entsteht, wenn wir alle Quantoren mit der Prädikatskonstante N beschränken, schreiben wir A^N.

Definition 4.2 Die folgenden Schlüsse bezeichnen wir als *Induktionsschlüsse*:

(N) $\quad n = 0 \vee (n = \mathrm{S}m \wedge Nm) \vdash Nn$

($P^{\mathfrak{A}}_u$) $\quad Nn \wedge \mathfrak{A}^N_u(P^{\mathfrak{A}}_u, n) \vdash P^{\mathfrak{A}}_u n$

Ist $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ ein Induktions- oder ein Grundschluß, so sind mit A auch alle A_i in Pos_v. Dies wird im Kollabierungslemma und in Lemma 6.4 ausgenutzt.
Mit $A \equiv B$ meinen wir, daß A und B für dieselbe Formel stehen.
Für $u < p$ sei folgendes definiert:

$$R_u :\equiv \begin{cases} N & \text{für } u = 0 \\ P^{\mathfrak{A}}_v & \text{für } u = v + 1 \end{cases}$$

Definition 4.3 $k \overset{\alpha}{\underset{m}{\mid}} \Gamma$ gelte genau dann, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:

(Ax1) $A \in \Gamma$ & $A \in \{$wahre arithmetische Primformeln$\} \cup \{\neg P^{\mathfrak{A}}_{<u} jn : u \leq j\}$

(Ax2) $\neg R_u n, R_u n \in \Gamma$

(Bas) $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ ist ein Grundschluß & $A \in \Gamma$
& es gibt $\alpha_0 \ll^{(1)}_k \alpha$ mit $\forall i \in I(k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\mid}} \Gamma, A_i)$.

(Ind) $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ ist ein Induktionsschluß & $A \in \Gamma$
& es gibt $\alpha_0 \ll^{(3)}_k \alpha$ mit $\forall i \in I(k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\mid}} \Gamma, A_i)$.

(Cut) Es gibt $\alpha_0 \ll^{(1)}_k \alpha$ mit $k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\mid}} \Gamma, \neg C$ & $k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\mid}} \Gamma, C$ & $|C| < m$.

(Ω_{u+1}) Es gibt $f \in K$ mit $typ(f) = u < p$ derart, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\quad \alpha = f[\Omega_{u+1}]$

(2) $\quad k \overset{f[0]}{\underset{m}{\mid}} \Gamma, R_u n$

(3) $\quad \forall \gamma < \Omega_{u+1} \forall \Delta \subseteq Pos_u(k \overset{\gamma}{\underset{0}{\mid}} \Delta, R_u n \implies k \overset{f[\gamma]}{\underset{m}{\mid}} \Delta, \Gamma)$

($\ll_k$) Es gibt $\alpha_0 \ll^{(1)}_k \alpha$ mit $k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\mid}} \Gamma$.

5 Schnittelimination und Kollabierung

Das Antezedenz der in diesem Kapitel zu beweisenden Aussagen enthält stets eine Formel der Gestalt

$$k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma.$$

Wir werden die Behauptungen jeweils mit einer Induktion nach der Herleitungstiefe α beweisen. Um also die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, reicht es, zu einem $\alpha_0 < \alpha$ zu gelangen. Im Falle eines (Ω_{u+1})-Schlusses dürfen wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, da aus Lemma 2.19

$$\gamma < \Omega_{u+1} \implies f[\gamma] < f[\Omega_{u+1}]$$

folgt.

Lemma 5.1 (Strukturschluß) $k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma \;\&\; m \leq n \;\&\; \Gamma \subseteq \Delta \implies k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{n}{\vdash}} \Delta$

Beweis durch Induktion nach α

- (Ax1), (Ax2). Diese Fälle sind klar wegen $\Gamma \subseteq \Delta$.
- Da gemäß Lemma 2.12(b) $\alpha_0 \ll_k^{(l)} \alpha \implies \alpha_0\#\beta \ll_k^{(l)} \alpha\#\beta$ gilt, führt in den übrigen Fällen die Induktionsvoraussetzung zum Ziel. Bei (Ω_{u+1}) ist zu beachten, daß bei gegebenem Kontext f auch $\beta\#f$ ein Kontext ist.

Lemma 5.2 (Inversion) *Sei $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ einer der Grundschlüsse $(\wedge)$, $(\forall)$ oder $(\neg P_<^{\mathfrak{A}})$. Dann gilt:*

$$k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, A \implies \forall i \in I (k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, A_i)$$

Beweis durch Induktion nach α

- Ist A die Hauptformel des letzten Schlusses, so war letzterer ein (Bas)-Schluß. Aus den Prämissen $\forall i \in I (k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, A_i)$ folgt wegen $\alpha_0 \ll_k \alpha$ mit einem $(\ll_k)$-Schluß die Behauptung.
- Sei A nicht die Hauptformel. Da mit $\gamma < \Omega_{u+1}$ auch $f[\gamma] < f[\Omega_{u+1}]$ gilt, ist im Fall (Ω_{u+1}) wie auch in allen anderen Fällen die Induktionsvoraussetzung anwendbar, womit sich das Gewünschte sofort ergibt.

Lemma 5.3 (Reduktion) *Sei C eine Formel der Gestalt $A \vee B$, $\exists x A$, $P^{\mathfrak{A}}_{<u} jn$, $\neg P^{\mathfrak{A}}_{u} n$, $\neg Nn$ oder eine falsche arithmetische Primformel und ferner $|C| = m$. Dann gilt:*

$$k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, C \ \ \& \ \ k \overset{\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Delta, \neg C \implies k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$$

Beweis durch Induktion nach α

- (Ax1). Falls $k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, C$ wegen (Ax1) gilt, gilt auch $k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$, da C nicht die für (Ax1) relevante Formel sein kann.
- (Ax2). Falls $k \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, C$ wegen (Ax2) gilt, gilt entweder auch $k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$ wegen (Ax2) oder aber $\neg C \in \Gamma$. Gilt letzteres, so folgt $k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$ aus $k \overset{\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Delta, \neg C$ mit einem Strukturschluß.
- (Bas). Sei $(A_i)_{i \in I} \vdash A$ ein Grundschluß mit $A \in \Gamma \cup \{C\}$. Ferner existiere ein $\alpha_0 \ll_k \alpha$ mit $\forall i \in I (k \overset{\alpha_0}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, C, A_i)$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann

  (1) $\quad \forall i \in I (k \overset{\alpha_0\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta, A_i)$.

  Falls $A \in \Gamma$ ist, so folgt wegen $\alpha_0\#\beta \ll_k \alpha\#\beta$ aus (1) mit (Bas) sofort $k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$. Im Falle von $A \notin \Gamma$, wenn also $A \equiv C$ gilt, ist der Grundschluß entweder $(\vee)$, $(\exists)$ oder $(P^{\mathfrak{A}}_{<})$ gewesen. Dann hat I nur ein Element, etwa 0. In diesem Fall folgt mit dem Inversionslemma aus $k \overset{\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Delta, \neg C$

  $$k \overset{\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Delta, \neg A_0$$

  und mit einem Strukturschluß ferner

  (2) $\quad k \overset{\alpha_0\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta, \neg A_0$.

  Da nun $|A_0| < |C| \leq m$ ist, folgt $k \overset{\alpha\#\beta}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma, \Delta$ mit (Cut) aus (1) und (2).
- In den übrigen Fällen kann C nicht Hauptformel sein. Die Behauptung ergibt sich jeweils direkt aus der Induktionsvoraussetzung unter Berücksichtigung von $\alpha_0 \ll_k^{(l)} \alpha \implies \alpha_0\#\beta \ll_k^{(l)} \alpha\#\beta$, vergleiche Lemma 2.12(b). Bei (Ω_{u+1}) beachten wir, daß mit f auch $\beta\#f$ ein Kontext ist, sowie daß wegen $\gamma < \Omega_{u+1} \implies f[\gamma] < f[\Omega_{u+1}]$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist.

Lemma 5.4 (Elimination) $k \overset{\alpha}{\underset{m+1}{\vdash}} \Gamma \implies k \overset{D_p \alpha}{\underset{m}{\vdash}} \Gamma$

Beweis durch Induktion nach α

- (Ax1), (Ax2). Hier ist nichts zu zeigen.
- (Bas). Nach Lemma 2.12(c) gilt mit $\alpha_0 \ll_k \alpha$ auch $D_p\alpha_0 \ll_k D_p(\alpha)$. Damit folgt die Behauptung durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung und (Bas).
- (Ind). Mit $\alpha_0 \ll_k^{(3)} \alpha$ gilt auch $D_p\alpha_0 \ll_k^{(3)} D_p\alpha$ und somit folgt die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung.
- (Ω_{u+1}). Für ein $f \in K$ mit $typ(f) = u < p$ gelte $\alpha = f[\Omega_{u+1}]$ und $k\vdash^{f[0]}_{m+1}\Gamma, R_u n$ und außerdem $k\vdash^{f[\gamma]}_{m+1}\Delta, \Gamma$ für alle $\gamma < \Omega_{u+1}$ und $\Delta \subseteq Pos_u$ mit $k\vdash^{\gamma}_{0}\Delta, R_u n$. Wegen $\gamma < \Omega_{u+1} \implies f[\gamma] < f[\Omega_{u+1}]$ folgt mit Induktionsvoraussetzung $k\vdash^{D_p f[0]}_{m}\Gamma, R_u n$ und $k\vdash^{D_p f[\gamma]}_{m}\Delta, \Gamma$ für $\gamma < \Omega_{u+1}$ und $\Delta \subseteq Pos_u$ mit $k\vdash^{\gamma}_{0}\Delta, R_u n$. Weil $typ(f) = u < p$ ist, gilt $D_p f \in K$. Weil zudem auch $D_p f[\Omega_{u+1}] = D_p\alpha$ ist, folgt mit (Ω_{u+1}) die Behauptung.
- $(\ll_k)$. Hier benutzen wir die Induktionsvoraussetzung und die Tatsache $\alpha_0 \ll_k \alpha \implies D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha$, vergleiche Lemma 2.12(c).
- (Cut). Für diesen Fall haben wir das Reduktionslemma. Sei $\alpha_0 \ll_k \alpha$ und gelte $k\vdash^{\alpha_0}_{m+1}\Gamma, \neg C$ und $k\vdash^{\alpha_0}_{m+1}\Gamma, C$ mit $|C| < m+1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $k\vdash^{D_p\alpha_0}_{m}\Gamma, \neg C$ und $k\vdash^{D_p\alpha_0}_{m}\Gamma, C$. Falls $|C| < m$ ist, folgt die Behauptung mit (Cut) unter Beachtung von $D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha$, vergleiche Lemma 2.12(c). Falls $|C| = m$ ist, erfüllt C oder $\neg C$ die Voraussetzung des Reduktionslemmas. Es ergibt sich $k\vdash^{D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0}_{m}\Gamma$, woraus sich wegen $D_p\alpha_0 \# D_p\alpha_0 \ll_k D_p\alpha$, vergleiche Lemma 2.15, mit $(\ll_k)$ die Behauptung ergibt.

Lemma 5.5 (Kollabierung)

(a) $\quad k\vdash^{\alpha}_{0}\Gamma \;\&\; \Gamma \subseteq Pos_v \implies k\vdash^{D_v\alpha}_{0}\Gamma$

(b) $\quad k\vdash^{\alpha}_{0}\Gamma \;\&\; \alpha < \Omega_1 \implies k\vdash^{G_k\alpha}_{0}\Gamma$

Beweis
(a) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach α.

- (Ax1), (Ax2). Die Axiome stellen keine Anforderungen an die Herleitungstiefe.
- (Bas), (Ind). Für einen Grund- oder Induktionsschluß $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ sind mit A auch für alle $i \in I$ die A_i in Pos_v. Deshalb ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar, und mit Lemma 2.12(c) und erneut (Bas) oder (Ind) folgt die Behauptung.

- (Cut). Da der Schnittrang gleich Null ist, kann der letzte Schluß kein Schnitt gewesen sein.
- ($\ll_k$). Wegen $\alpha_0 \ll_k \alpha \implies D_v\alpha_0 \ll_k D_v\alpha$ folgt mit ($\ll_k$) die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung.
- (Ω_{u+1}). Dies ist der interessante Fall: Gelte $\alpha = f[\Omega_{u+1}]$ für ein $f \in K$ mit $typ(f) = u < p$, $k\frac{|f[0]}{0}\Gamma, R_u n$ und

  $$(1) \qquad \forall\gamma < \Omega_{u+1} \forall\Delta \subseteq Pos_u(k\frac{|\gamma}{0}\Delta, R_u n \implies k\frac{|f[\gamma]}{0}\Delta, \Gamma).$$

  Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder ist $u < v$, so daß $\Gamma, R_u n \subseteq Pos_v$ und $\Gamma, \Delta \subseteq Pos_v$ für $\Delta \subseteq Pos_u$ ist und somit nach Induktionsvoraussetzung $k\frac{|D_v f[0]}{0}\Gamma, R_u n$ und $k\frac{|D_v f[\gamma]}{0}\Delta, \Gamma$ für $\gamma < \Omega_{u+1}$ und $\Delta \subseteq Pos_u$ mit $k\frac{|\gamma}{0}\Delta, R_u n$. Da $typ(f) = u < v$ gilt, ist $D_v f$ ein Kontext. Weil $D_v f[\Omega_{u+1}] = D_v\alpha$ ist, folgt die Behauptung mit (Ω_{u+1}). Oder aber es gilt $u \geq v$. Wegen $\Gamma, R_u n \subseteq Pos_u$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung für u statt für v diesmal $k\frac{|D_u f[0]}{0}\Gamma, R_u n$. Wegen $\Gamma \subseteq Pos_v \subseteq Pos_u$ wenden wir hierauf (1) an und erhalten $k\frac{|f[D_u f[0]]}{0}\Gamma$. Wegen $D_u f[0] < \Omega_{u+1}$ ist $f[D_u f[0]] < f[\Omega_{u+1}] = \alpha$, und somit ergibt eine erneute Anwendung der Induktionsvoraussetzung $k\frac{|D_v f[D_u f[0]]}{0}\Gamma$. Hieraus folgt mit Satz 2.23 $k\frac{|D_v f[\Omega_{u+1}]}{0}\Gamma$, was zu beweisen war.

(b) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach α. Da $\alpha < \Omega_1$ und der Schnittrang Null ist, enthält die Herleitung keinen (Ω_{u+1})-Schluß und keinen Schnitt, vergleiche Lemma 2.14(b). Im Falle eines Axioms ist nichts zu zeigen und in den verbleibenden Fällen folgt die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung, Lemma 2.26(b) und ($\ll_k$).

6 Einbettung von GID_p nach GID_p^∞

Die Ordinalzahl $\widehat{l} := D_p^l 0$ sei das Ergebnis der l-fachen Anwendung von D_p auf 0. Der Beweis des Tautologielemmas bedarf der folgenden Aussagen, die in Lemma 2.16 bewiesen wurden:

- $m < n \implies \widehat{m} \ll_k \widehat{n}$
- $\widehat{0} \ll_k \widehat{1} \ll_k \widehat{2} \ll_k \ldots$

Der Schluß von $k \frac{\alpha_0}{m} A$ auf $k \frac{\alpha}{m} A \vee B$, ein $\vee$-Schluß, erfordert zwei Schritte: Zuerst fügen wir per Strukturschluß die Formel $A \vee B$ hinzu und schließen dann mit (Bas). Gleiches gilt für die übrigen Grund- und Induktionsschlüsse. Im folgenden werden wir solch einen Strukturschluß der Kürze halber unterschlagen.

Lemma 6.1 (Tautologie)
Ist F eine Formel ohne freie Variablen und $l = |F|$ ihre Länge, so gilt

$$k \frac{\widehat{2l}}{0} \neg F, F.$$

Beweis durch Induktion nach der Länge der Formel F
Wir unterscheiden drei Fälle:

- $l = 0$
  Entweder ist die Formel F eine arithmetische Primformel, F oder $\neg F$ ist wahr und $k \frac{\widehat{0}}{0} \neg F, F$ folgt mit (Ax1), oder aber F oder $\neg F$ hat die Gestalt Nn oder $P_u^{\mathfrak{A}} n$, und $k \frac{\widehat{0}}{0} \neg F, F$ folgt mit (Ax2).
- $l > 0$
  Es gibt sechs Fälle. Da jeweils zwei symmetrisch sind, betrachten wir nur drei:
  - $F \equiv P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn$
    Falls $u \leq j$ ist, folgt $k \frac{\widehat{2}}{0} \neg F, F$ mit (Ax1). Sonst gilt wegen (Ax2)
    $$k \frac{\widehat{0}}{0} \neg P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn, P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn, P_j^{\mathfrak{A}} n, \neg P_j^{\mathfrak{A}} n,$$
    und aus $j < u$ folgt mit $(P_<^{\mathfrak{A}})$ und $(\neg P_<^{\mathfrak{A}})$
    $$k \frac{\widehat{2}}{0} \neg P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn, P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn.$$
    Wegen $|P_{<u}^{\mathfrak{A}} jn| = 1$ ist das die Behauptung.

- $F \equiv A \vee B$
  Sei $a := |A|$ und $b := |B|$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann
  $$k \vdash_0^{\widehat{2a}} \neg A, A \text{ und } k \vdash_0^{\widehat{2b}} \neg B, B.$$
  Sei ohne Einschränkung $a \leq b$. Falls $a \neq b$ ist, so vergrößern wir die Herleitungstiefe $\widehat{2a}$ mit $(\ll_k)$ zu $\widehat{2b}$. Mit $(\vee)$ folgt jeweils
  $$k \vdash_0^{\widehat{2b+1}} \neg A, A \vee B \text{ und } k \vdash_0^{\widehat{2b+1}} \neg B, A \vee B,$$
  woraus sich mit $(\wedge)$
  $$k \vdash_0^{\widehat{2b+2}} \neg A \wedge \neg B, A \vee B$$
  ergibt, was der Behauptung entspricht.
- $F \equiv \exists x A$
  Sei $a := |A|$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle n
  $$k \vdash_0^{\widehat{2a}} \neg A_x(n), A_x(n).$$
  Mit $(\exists)$ folgt für alle n
  $$k \vdash_0^{\widehat{2a+1}} \neg A_x(n), \exists x A$$
  und hieraus mit $(\forall)$
  $$k \vdash_0^{\widehat{2a+2}} \forall x \neg A, \exists x A,$$
  was dem Gewünschten entspricht.

Lemma 6.2 (Falsch)
Ist A eine falsche arithmetische Primformel, so gilt:

$$k \vdash_0^{\alpha} \Gamma, A \implies k \vdash_0^{\alpha} \Gamma$$

Beweis
Die Behauptung folgt durch eine einfache Induktion nach α. Weil eine falsche arithmetische Primformel niemals Hauptformel ist, ist die Anwendung der Induktionsvoraussetzung der Schlüssel zum Erfolg.

Lemma 6.3 ($\vee$-Inversion) $k \vdash_0^{\alpha} \Gamma, A \vee B \implies k \vdash_0^{\alpha} \Gamma, A, B$

Beweis
Eine einfache Induktion nach α führt uns zum Ziel.

- (Ax1), (Ax2). In diesen Fällen gilt auch $k\,\vert\!\frac{\alpha}{0}\,\Gamma$, woraus wir mit einem Strukturschluß die Behauptung erhalten.
- (Bas), (Ind). Sei zunächst $A \vee B$ nicht die Hauptformel des letzten Schlusses. Dann folgt die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung. Ist $A \vee B$ die Hauptformel des letzten Schlusses, so war dieser ein $(\vee)$-Schluß, und es gab ein $\alpha_0 \ll_k \alpha$ derart, daß entweder $k\,\vert\!\frac{\alpha_0}{0}\,\Gamma, A$ oder $k\,\vert\!\frac{\alpha_0}{0}\,\Gamma, B$ galt. In beiden Fällen liefert ein Strukturschluß und $(\ll_k)$ die Behauptung.
- (Cut). Ein Schnitt kann nicht vorliegen, da der Schnittrang Null ist.
- (Ω_{u+1}), $(\ll_k)$. In diesen Fällen folgt die Behauptung mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung.

Sei F für den Rest des Kapitels eine Formel mit genau einer freien Variablen x und der Länge $l = |F|$. Für eine natürliche Zahl $u < p$ sei die Formelmenge θ_u wie folgt definiert:

$$\theta_u := \begin{cases} \{\neg F_x(0), \neg\forall x(Nx \to (F \to F_x(\mathrm{S}x)))\} & \text{für } u = 0 \\ \{\neg\forall x(Nx \to (\mathfrak{A}_v^N(F_x(\cdot), x) \to F))\} & \text{für } u = v+1 \end{cases}$$

Zu gegebener Formel A nennen wir A^* die Formel, die entsteht, wenn wir alle Auftreten von R_u durch $F_x(\cdot)$ ersetzen. Außerdem sei $\{A_1, \ldots, A_n\}^*$ die Menge $\{A_1^*, \ldots, A_n^*\}$.

Sublemma 6.4 *Sei $\Delta \cup \Delta_0 \subseteq Pos_u$ und $\gamma < \Omega_{u+1}$. Dann gilt:*

$$k\,\vert\!\frac{\gamma}{0}\,\Delta, \Delta_0 \implies k\,\vert\!\frac{\widehat{2l+\gamma}}{0}\,\Delta, \theta_u, \Delta_0^*$$

Beweis durch Induktion nach γ

(Ax1) Ist A die Formel $\neg P^{\mathfrak{A}}_{<u} jn$ mit $u \leq j$ oder eine wahre arithmetische Primformel und ist A in Δ, Δ_0, so insbesondere in $\Delta, \theta_u, \Delta_0^*$.

(Ax2) Nach Definition von $R_u n$ ist $\neg R_u n$ nicht in Pos_u. Falls $\neg A$ und A in $\Delta \cup \Delta_0 \subseteq Pos_u$, kann somit weder $\neg A$ noch A die Formel $R_u n$ sein. Also gilt $\neg A, A \in \Delta, \theta_u, \Delta_0^*$.

(Bas) Sei $(A_i)_{i\in I} \vdash A$ ein Grundschluß, $\gamma_0 \ll_k \gamma$ und $A \in \Delta \cup \Delta_0$. Somit ist A in Pos_u, insbesondere sind auch alle A_i in Pos_u. Also ist für $i \in I$ die Induktionsvoraussetzung auf $k\,\vert\!\frac{\gamma_0}{0}\,\Delta, \Delta_0, A_i$ anwendbar. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $A \in \Delta$

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $i \in I$

  $$k\,\vert\!\frac{\widehat{2l+\gamma_0}}{0}\,\Delta, A_i, \theta_u, \Delta_0^*,$$

  woraus wir mit (Bas) das Geforderte erhalten.

- $A \in \Delta_0$
  Die Induktionsvoraussetzung liefert uns für alle $i \in I$

  $$k\left|\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0}\right.\Delta, \theta_u, \Delta_0^*, A_i^*,$$

  und somit folgt mit (Bas) die Behauptung, falls auch $(A_i^*)_{i\in I} \vdash A^*$ ein Grundschluß ist. Letzteres ist der Fall, da A und alle A_i in Pos_u sind.

(Ind) Sei $\gamma_0 \ll_k^{(3)} \gamma$. Also existieren γ_1 und γ_2 mit

$$\widehat{2l} + \gamma_0 \ll_k \widehat{2l} + \gamma_1 \ll_k \widehat{2l} + \gamma_2 \ll_k \widehat{2l} + \gamma.$$

Entlang dieser Kette werden wir in ein paar Zeilen das Geforderte herleiten. Wir betrachten die beiden möglichen Induktionsschlüsse getrennt:

- Gelte zunächst

  (1) $\quad k\left|\frac{\gamma_0}{0}\right.\Delta, n = 0 \vee (n = \mathrm{S}m \wedge Nm), \Delta_0.$

  Wie schlossen auf $k\left|\frac{\gamma}{0}\right.\Delta, \Delta_0, Nn$. Falls $Nn \in \Delta$ ist, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung, wobei wir $n = 0 \vee (n = \mathrm{S}m \wedge Nm)$ zu Δ zählen, und (Ind) die Behauptung.
  Sei $Nn \in \Delta_0$. Ist $R_u \not\equiv N$, so gehen wir wie im Fall $Nn \in \Delta$ vor. Sei also $R_u \equiv N$ und somit $F_x(n) \in \Delta_0^*$. Das Tautologielemma liefert uns

  (2) $\quad k\left|\frac{\widehat{2l}}{0}\right.\neg F_x(n), F_x(n).$

  Ein Strukturschluß macht daraus wegen $F_x(n) \in \Delta_0^*$

  (3) $\quad k\left|\frac{\widehat{2l}}{0}\right.\Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \neg F_x(n).$

  Wir unterscheiden drei Fälle:

  - $n \neq 0 \;\&\; n \neq m+1$
    Wenden wir $\vee$-Inversion und das Inversionslemma auf (1) an, so ergibt das $k\left|\frac{\gamma_0}{0}\right.\Delta, \Delta_0, n = 0, n = \mathrm{S}m$. Da $n \neq 0$ und $n \neq m+1$ gilt, folgt dann mit dem Falschlemma $k\left|\frac{\gamma_0}{0}\right.\Delta, \Delta_0$, woraus wir mit der Induktionsvoraussetzung und anschließendem $(\ll_k)$ die Behauptung erringen.
  - $n = 0$
    Aus (2) folgt wegen $\neg F_x(0) \in \theta_u$ und $F_x(0) \in \Delta_0^*$ mit einem Strukturschluß die Behauptung.

- $n = m + 1$

  Dieser Fall ist der eine Grund, daß ein (Ind)-Schluß drei Schritte kostet. Für (1) liefern uns $\vee$-Inversion, das Inversionslemma und das Falschlemma $k \vert\!\frac{\gamma_0}{0} \Delta, \Delta_0, Nm$. Wenden wir hierauf die Induktionsvoraussetzung zweimal unterschiedlich an, so haben wir

  (4) $\quad k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0} \Delta, Nm, \theta_u, \Delta_0^*$

  und

  (5) $\quad k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, F_x(m).$

  Mit einem $(\wedge)$-Schluß ergeben (3) und (5)

  $$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_1}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, F_x(m) \wedge \neg F_x(n),$$

  ein weiterer mit (4) liefert

  $$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_2}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, Nm \wedge F_x(m) \wedge \neg F_x(n).$$

  Ein abschließender $(\exists)$-Schluß führt zum Ergebnis,

  $$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \neg \forall x (Nx \to (F \to F_x(\mathrm{S}x))),$$

  denn die letzte Formel ist in unserem Fall in θ_u.

- Gelte jetzt

  (6) $\quad k \vert\!\frac{\gamma_0}{0} \Delta, \Delta_0, Nn \wedge \mathfrak{A}_w^N(P_w^{\mathfrak{A}}, n).$

  Wie schlossen auf $k \vert\!\frac{\gamma}{0} \Delta, \Delta_0, P_w^{\mathfrak{A}} n$. Wir betrachten drei Fälle:

  - $w + 1 \neq u$

    In dieser Situation kann R_u nicht $P_w^{\mathfrak{A}}$ sein und ohne Umwege folgt $k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, Nn \wedge \mathfrak{A}_w^N(P_w^{\mathfrak{A}}, n)$ aus der Induktionsvoraussetzung und dann mit (Ind) die Behauptung.

  - $w + 1 = u \;\;\&\;\; P_w^{\mathfrak{A}} n \in \Delta$

    In diesem Punkt folgt wie im vorangegangenen die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung und erneutem (Ind).

  - $w + 1 = u \;\;\&\;\; P_w^{\mathfrak{A}} n \in \Delta_0$

    Dieser Fall ist der andere Grund, daß ein (Ind)-Schluß drei Schritte kostet. Statt $P_w^{\mathfrak{A}} n$ ist nun $F_x(n)$ in Δ_0^*. Somit ergeben das Tautologielemma und ein Strukturschluß

    (7) $\quad k \vert\!\frac{\widehat{2l}}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \neg F_x(n).$

    Wenden wir die Induktionsvoraussetzung und das Inversionslemma auf (6) an, so bekommen wir

    (8) $\quad k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, Nn$

und, da $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}(X,Y)$-Formel ist,

(9) $\quad k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_0}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \mathfrak{A}_w^N(F_x(\cdot), n)$.

Aus (7) und (9) folgt mit $(\wedge)$

$$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_1}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \mathfrak{A}_w^N(F_x(\cdot), n) \wedge \neg F_x(n),$$

woraus wir mit (8) und erneutem $(\wedge)$

$$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma_2}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, Nn \wedge \mathfrak{A}_w^N(F_x(\cdot), n) \wedge \neg F_x(n)$$

erhalten. Mit einem $(\exists)$-Schluß folgt

$$k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, \neg\forall x(Nx \to (\mathfrak{A}_w^N(F_x(\cdot), x) \to F)),$$

welches das gleiche wie $k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\gamma}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*$ ist.

(Ω_{w+1}) Sei f ein Kontext, so daß $\gamma = f[\Omega_{w+1}]$ ist. Gelte $k \vert\!\frac{f[0]}{0} \Delta, \Delta_0, R_w n$ und $k \vert\!\frac{f[\delta]}{0} \Gamma, \Delta, \Delta_0$, falls $\delta < \Omega_{w+1}$, $\Gamma \subseteq Pos_w$ und $k \vert\!\frac{\delta}{0} \Gamma, R_w n$ gilt. Da $\gamma < \Omega_{u+1}$ ist, folgt mit Lemma 2.14(b) $w < u$, insbesondere $R_w n \in Pos_w \subseteq Pos_u$. Ferner gilt mit $\Gamma \in Pos_w$ auch $\Gamma \in Pos_u$. Die Induktionsvoraussetzung ist somit anwendbar, und es folgt $k \vert\!\frac{\widehat{2l}+f[0]}{0} \Delta, \theta_u, \Delta_0^*, R_w n$ und, falls $\delta < \Omega_{w+1}$, $\Gamma \subseteq Pos_w$ und $k \vert\!\frac{\delta}{0} \Gamma, R_w n$ gilt, auch $k \vert\!\frac{\widehat{2l}+f[\delta]}{0} \Gamma, \Delta, \theta_u, \Delta_0^*$. Mit einem (Ω_{w+1})-Schluß folgt, da $\widehat{2l}+f$ auch ein Kontext ist, das Verlangte.
(Cut) Ein Schnitt kann wegen des kleinen Schnittranges nicht vorliegen.
$(\ll_k)$ Dieser Fall ist auf gut Englisch gesagt straightforward.

Im Beweis des nächsten Lemmas kommt das soeben bewiesene Sublemma zum Einsatz. Wir werden es nur für $\Delta_0 = \{R_u n\}$ anwenden. Die kompliziertere Formulierung machte es möglich, bei Anwendung der Induktionsvoraussetzung R_u in mehr als nur einer Formel in $F_x(\cdot)$ umzuwandeln.

Lemma 6.5 $k \vert\!\frac{\widehat{2l}+\Omega_{u+1}}{0} \theta_u, \neg R_u n, F_x(n)$

Beweis
Sei f der Kontext $\widehat{2l} + id_u$, wobei id_u, wie vorher definiert, die Identität auf den Ordinalzahlen ist, die kleiner oder gleich Ω_{u+1} sind. Nach (Ax2) gilt

$$k \vert\!\frac{f[0]}{0} \theta_u, \neg R_u n, F_x(n), R_u n.$$

Außerdem zeigte das vorhergehende Sublemma, es gilt $R_u n \in Pos_u$,

$$\forall\gamma < \Omega_{u+1} \forall\Delta \subseteq Pos_u (k \vert\!\frac{\gamma}{0} \Delta, R_u n \implies k \vert\!\frac{f[\gamma]}{0} \Delta, \theta_u, F_x(n)).$$

Mit einem simplen Strukturschluß fügen wir dem letzten Teil die Formel $\neg R_u n$ bei,

$$\forall \gamma < \Omega_{u+1} \forall \Delta \subseteq Pos_u (k \vdash^{\gamma}_{0} \Delta, R_u n \implies k \vdash^{f[\gamma]}_{0} \Delta, \theta_u, \neg R_u n, F_x(n)).$$

Damit haben wir nun exakt die Voraussetzungen für den (Ω_{u+1})-Schluß, der genau auf diesen Moment gewartet hat. Dies ist die Stelle, für die er in den Kalkül aufgenommen wurde: Einmal angewendet liefert er das Gewünschte.

Die Ordinalzahl ι definieren wir als

$$\iota := \Omega_p + \ldots + \Omega_1.$$

Die Herleitungen im Beweis des folgenden Lemmas geschehen entlang der Kette

$$\widehat{n} + \iota \ll_k \widehat{n+1} + \iota \ll_k \widehat{n+2} + \iota \ll_k \ldots$$

Lemma 6.6
Für jedes mathematische Axiom A von GID_p, bei dem die freien Variablen beliebig mit Numeralen besetzt seien, existiert ein l derart, daß

$$k \vdash^{\widehat{l}+\iota}_{0} A^N$$

gilt.

Beweis

- $A \equiv B_x(0) \wedge \forall x(B \rightarrow B_x(\mathrm{S}x)) \rightarrow \forall x B$ [Induktionsschema]
  Sei $F :\equiv B^N$ und $l = |F|$. Für $u = 0$ liefert uns Lemma 6.5

  $$k \vdash^{\widehat{2l}+\Omega_1}_{0} \neg F_x(0), \neg \forall x(Nx \rightarrow (F \rightarrow F_x(\mathrm{S}x))), \neg Nn, F_x(n)$$

  für alle n. Zweimal $(\vee)$ und einmal $(\forall)$ ergeben

  $$k \vdash^{\widehat{2l+3}+\Omega_1}_{0} \neg F_x(0), \neg \forall x(Nx \rightarrow (F \rightarrow F_x(\mathrm{S}x))), \forall x(Nx \rightarrow F).$$

  Vier weitere $(\vee)$ lassen dies zu

  $$k \vdash^{\widehat{2l+7}+\Omega_1}_{0} F_x(0) \wedge \forall x(Nx \rightarrow (F \rightarrow F_x(\mathrm{S}x))) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow F)$$

  werden. Mit $(\ll_k)$ wird Ω_1 zu ι.

- $A \equiv \forall x(\mathfrak{A}_v(P_v^{\mathfrak{A}}, x) \to P_v^{\mathfrak{A}} x)$ für ein v $[P^{\mathfrak{A}}.1]$
  Sei $l = |\mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, x)|$. Zunächst liefert uns das Tautologielemma

  $$k \overset{\widehat{2l}}{\underset{0}{\vdash}} \neg\mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, n), \mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, n).$$

  Nach (Ax2) gilt ferner

  $$k \overset{\widehat{2l}}{\underset{0}{\vdash}} \neg Nn, Nn,$$

  woraus sich mit $(\wedge)$

  $$k \overset{\widehat{2l+1}}{\underset{0}{\vdash}} \neg Nn, \neg\mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, n), Nn \wedge \mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, n)$$

  ergibt. Dies ist die Voraussetzung für einen $(P_v^{\mathfrak{A}})$-Schluß:

  $$k \overset{\widehat{2l+4}}{\underset{0}{\vdash}} \neg Nn, \neg\mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, n), P_v^{\mathfrak{A}} n$$

  Ähnlich zum vorigen Fall ergeben viermal $(\vee)$ und einmal $(\forall)$

  $$k \overset{\widehat{2l+9}}{\underset{0}{\vdash}} \forall x(Nx \to (\mathfrak{A}_v^N(P_v^{\mathfrak{A}}, x) \to P_v^{\mathfrak{A}} x)).$$

  Mit $(\ll_k)$ ergänzen wir schließlich ein ι.
- $A \equiv \forall x(\mathfrak{A}_v(B_x(\cdot), x) \to B) \to \forall x(P_v^{\mathfrak{A}} x \to B)$ für ein $v < p - 1$ $[P^{\mathfrak{A}}.2]$
  Sei $F :\equiv B^N$ und $l = |F|$. Unser Ausgangspunkt ist das Ergebnis von Lemma 6.5 für $u = v + 1$. Für alle n gilt

  $$k \overset{\widehat{2l}+\Omega_{u+1}}{\underset{0}{\vdash}} \theta_u, \neg P_v^{\mathfrak{A}} n, F_x(n).$$

  Ein Strukturschluß bereitet den beschränkten Quantor vor:

  $$k \overset{\widehat{2l}+\Omega_{u+1}}{\underset{0}{\vdash}} \theta_u, \neg Nn, \neg P_v^{\mathfrak{A}} n, F_x(n)$$

  Mit viermal $(\vee)$ und einmal $(\forall)$ ergibt dies

  $$k \overset{\widehat{2l+5}+\Omega_{u+1}}{\underset{0}{\vdash}} \theta_u, \forall x(Nx \to (P_v^{\mathfrak{A}} x \to F)),$$

  woraus mit zweimal $(\vee)$ und $(\ll_k)$ die Behauptung folgt

  $$\begin{aligned} k \overset{\widehat{2l+7}+\iota}{\underset{0}{\vdash}} & \forall x(Nx \to (\mathfrak{A}_v^N(F_x(\cdot), x) \to F)) \\ & \to \forall x(Nx \to (P_v^{\mathfrak{A}} x \to F)). \end{aligned}$$

- $A \equiv \forall x_0 \forall x_1 (P^{\mathfrak{A}}_{<v} x_0 x_1 \leftrightarrow x_0 < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{x_0} x_1)$ für ein v $[P^{\mathfrak{A}}.3]$
  Wir beginnen mit der ersten Implikation. Gelte zunächst $j < v$. Dann gilt nach (Ax2) und (Ax1)

  $$k \vdash^{\widehat{0}}_{0} \neg P^{\mathfrak{A}}_{j} n, P^{\mathfrak{A}}_{j} n \quad k \vdash^{\widehat{0}}_{0} \neg P^{\mathfrak{A}}_{j} n, j < v.$$

  Mit $(\wedge)$ folgt

  $$k \vdash^{\widehat{1}}_{0} \neg P^{\mathfrak{A}}_{j} n, j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n,$$

  und wegen $j < v$ mit $(\neg P^{\mathfrak{A}}_{<})$

  (1) $\quad k \vdash^{\widehat{2}}_{0} \neg P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn, j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n,$

  woraus sich mit zweimal $(\vee)$

  (2) $\quad k \vdash^{\widehat{4}}_{0} P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn \rightarrow j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n$

  ergibt. Dies folgt auch sofort für $v \leq j$, da in diesem Fall (1) nach (Ax1) gilt. Zeigen wir nun die zweite Implikation. Sei wieder zuerst $j < v$. Also gilt nach (Ax2)

  $$k \vdash^{\widehat{0}}_{0} \neg j < v, \neg P^{\mathfrak{A}}_{j} n, P^{\mathfrak{A}}_{j} n,$$

  und, da $j < v$ ist, mit $(P^{\mathfrak{A}}_{<})$ auch

  (3) $\quad k \vdash^{\widehat{1}}_{0} \neg j < v, \neg P^{\mathfrak{A}}_{j} n, P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn.$

  Mit viermal $(\vee)$ folgt dann

  (4) $\quad k \vdash^{\widehat{5}}_{0} (j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n) \rightarrow P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn.$

  Im Falle $v \leq j$ folgt (3) sofort mit (Ax1), da $\neg j < v$ eine wahre Primformel ist. Somit gilt auch (4). Fügen wir nun (2) und (4) mit $(\wedge)$ zusammen,

  $$k \vdash^{\widehat{6}}_{0} P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn \leftrightarrow (j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n),$$

  geben mit einem Strukturschluß die Schranken für die Quantoren hinzu,

  $$k \vdash^{\widehat{6}}_{0} \neg Nj, \neg Nn, P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn \leftrightarrow (j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} n),$$

  verbinden die beiden hinteren Formeln mit zweimal $(\vee)$ und einmal $(\forall)$,

  $$k \vdash^{\widehat{9}}_{0} \neg Nj, \forall x_1 (Nx_1 \rightarrow (P^{\mathfrak{A}}_{<v} jx_1 \leftrightarrow (j < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{j} x_1))),$$

  und wiederholen das Verfahren, zweimal $(\vee)$ und einmal $(\forall)$, so erhalten wir

  $$k \vdash^{\widehat{12}}_{0} \forall x_0 (Nx_0 \rightarrow \forall x_1 (Nx_1 \rightarrow (P^{\mathfrak{A}}_{<v} x_0 x_1 \leftrightarrow (x_0 < v \wedge P^{\mathfrak{A}}_{x_0} x_1)))).$$

  Mit einem simplen Strukturschluß fügen wir das ι hinzu.

- Die übrigen Axiome von PA folgen sehr leicht.

Die Herleitungen des nächsten Lemmas verlaufen entlang der natürlichen Zahlen. Wir schreiben S^n für n-fach S.

Lemma 6.7

(a) $k\vdash_0^{5n+4} Nn$

(b) $k\vdash_0^{5n} \neg Ni, N\mathrm{S}^n i$

Beweis

(a) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n. Da $0 = 0$ eine wahre arithmetische Primformel ist, gilt nach (Ax1)

$$k\vdash_0^{0} 0 = 0.$$

Mit $(\vee)$ folgt

$$k\vdash_0^{1} 0 = 0 \vee (0 = \mathrm{S}0 \wedge N0),$$

und (Ind) ergibt damit

$$k\vdash_0^{4} N0,$$

was den Induktionsanfang darstellt. Sei $m+1 = n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$k\vdash_0^{5m+4} Nm$$

und, da $n = \mathrm{S}m$ eine wahre arithmetische Primformel ist, nach (Ax1)

$$k\vdash_0^{0} n = \mathrm{S}m.$$

Verbinden wir die Formeln mit $(\wedge)$,

$$k\vdash_0^{5m+4+1} n = \mathrm{S}m \wedge Nm,$$

ergänzen $n = 0$ mit $(\vee)$,

$$k\vdash_0^{5m+4+2} n = 0 \vee (n = \mathrm{S}m \wedge Nm),$$

so folgt mit (Ind)

$$k\vdash_0^{5m+4+5} Nn,$$

und wir sind wegen $5m + 4 + 5 = 5n + 4$ am Ziel.

(b) Wieder führen wir eine Induktion nach n. Nach (Ax2) gilt

$$k\vdash_0^{0} \neg Ni, Ni.$$

Dies ist der Induktionsanfang. Der Induktionsschluß ist im wesentlichen identisch mit dem von (a).

Lemma 6.8 $k\frac{l}{0}\Gamma \implies k\frac{\widehat{l}}{0}\Gamma$

Beweis
Die Aussage folgt durch eine einfache Induktion nach l. Da l eine natürliche Zahl ist, kann der letzte Schluß nicht (Ω_{u+1}) gewesen sein.

Schreiben wir $A[t_1/y_1, \ldots, t_m/y_m]$, so meinen wir die Formel, die aus A entsteht, wenn wir $y_1, \ldots, y_m$, das müssen genau die freien Variablen von A sein, durch die Terme $t_1, \ldots, t_m$ ersetzen. Schreiben wir $A[y_1/y_1, \ldots, y_m/y_m]$, so ist das eine andere Schreibweise für A, die zusätzlich zum Ausdruck bringt, daß $y_1, \ldots, y_m$ genau die freien Variablen von A sind. Diese Schreibweise benutzen wir auch für endliche Formelmengen. Notwendig ist sie, um den $(\exists)$-Fall des nächsten Lemmas exakt zu formulieren.

Lemma 6.9 *Für* $\vdash \Gamma[y_1/y_1, \ldots, y_m/y_m]$ *existiert ein* l *derart, daß*

$$k\frac{\widehat{l}}{0}\neg N i_1, \ldots, \neg N i_m, \Gamma[i_1/y_1, \ldots, i_m/y_m]^N$$

für alle natürlichen Zahlen $i_1, \ldots, i_m$ *gilt.*

Beweis
Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach der Definition von $\vdash \Gamma$. Sei der besseren Lesbarkeit halber $m = 1$, desweiteren y die einzige freie Variable, die in Γ auftritt.

- (Ax). Das Tautologielemma und ein Strukturschluß lösen diesen Fall.
- $(\wedge)$, $(\vee)$. In diesem Fall folgt die Behauptung direkt aus der Induktionsvoraussetzung. Eventuell ist dabei ein Strukturschluß erforderlich.
- $(\forall)$. Gelte $\vdash \Gamma, A$, wobei x nicht frei in Γ erscheint, anderes geschrieben wäre das $\vdash \Gamma[y/y], A[y/y, x/x]$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein l, so daß für alle i und n

  $$k\frac{\widehat{l}}{0}\neg N i, \neg N n, \Gamma[i/y]^N, A[i/y, n/x]^N$$

  gilt. Mit $(\vee)$ und $(\forall)$ ergibt das wegen $\forall x A \in \Gamma$

  $$k\frac{\widehat{l+2}}{0}\neg N i, \Gamma[i/y]^N.$$

- $(\exists)$. Sei y die freie Variable in Γ und gelte

  (1) $\qquad \vdash \Gamma, A_x(t),$

  sowie $\exists x A \in \Gamma$. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $t = \mathrm{S}^n 0$
  Falls y auch freie Variable in A ist, können wir für (1)
  $$\vdash \Gamma[y/y], A_x(\mathrm{S}^n 0)[y/y]$$
  schreiben. Falls y keine freie Variable in A ist, würde sich außer unseren Notationen nichts ändern. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein l derart, daß für alle i
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l}}{0} \neg Ni, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n 0)[i/y]^N$$
  gilt. Ferner gilt nach Lemmata 6.7(a) und 6.8 auch $k \mid\!\frac{\widehat{5n+4}}{0} Nn$. Somit folgt mit ($\wedge$)
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l+2+5n+4}}{0} \neg Ni, \Gamma[i/y]^N, Nn \wedge A_x(\mathrm{S}^n 0)[i/y]^N,$$
  woraus sich mit ($\exists$)
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l+5n+8}}{0} \neg Ni, \Gamma[i/y]^N$$
  ergibt.
- $t = \mathrm{S}^n z$
  Nehmen wir wiederum an, daß y auch freie Variable in A ist, so können wir für (1)
  $$\vdash \Gamma[y/y], A_x(\mathrm{S}^n z)[y/y, z/z]$$
  schreiben. Falls y keine freie Variable in A ist, würde sich wiederum außer unseren Notationen nichts ändern. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein l derart, daß für alle i und j
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l}}{0} \neg Ni, \neg Nj, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n z)[i/y, j/z]^N$$
  gilt, insbesondere also auch für $j = 0$
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l}}{0} \neg Ni, \neg N0, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n z)[i/y, 0/z]^N,$$
  oder anders notiert
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l}}{0} \neg Ni, \neg N0, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n 0)[i/y]^N.$$
  Nach Lemmata 6.7(a) und 6.8 gilt $k \mid\!\frac{\widehat{4}}{0} N0$. Mit dem Reduktionslemma folgt also
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l+6}}{0} \neg Ni, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n 0)[i/y]^N.$$
  Außerdem gilt nach Lemmata 6.7(a) und 6.8 auch $k \mid\!\frac{\widehat{5n+4}}{0} Nn$. Somit folgt mit ($\wedge$)
  $$k \mid\!\frac{\widehat{l+2+5n+8}}{0} \neg Ni, \Gamma[i/y]^N, Nn \wedge A_x(\mathrm{S}^n 0)[i/y]^N,$$

woraus sich mit $(\exists)$

$$k\,|\!\frac{\widehat{l+5n+12}}{0}\,\neg Ni, \Gamma[i/y]^N$$

ergibt.

- $t = \mathrm{S}^n y$
  Wir schreiben für (1)

  $$\vdash \Gamma[y/y], A_x(\mathrm{S}^n y)[y/y].$$

  Wiederum existiert nach Induktionsvoraussetzung ein l derart, daß für alle i

  $$k\,|\!\frac{\widehat{l}}{0}\,\neg Ni, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n y)[i/y]^N$$

  oder anders notiert

  $$k\,|\!\frac{\widehat{l}}{0}\,\neg Ni, \Gamma[i/y]^N, A_x(\mathrm{S}^n i)^N$$

  gilt. Lemmata 6.7(b) und 6.8 liefern uns $k\,|\!\frac{\widehat{5n}}{0}\,\neg Ni, N\mathrm{S}^n i$. Also folgt mit $(\wedge)$

  $$k\,|\!\frac{\widehat{l+5n+1}}{0}\,\neg Ni, \Gamma[i/y]^N, N\mathrm{S}^n i \wedge A_x(\mathrm{S}^n i)^N.$$

  Wenden wir einmal $(\exists)$ an, erhalten wir

  $$k\,|\!\frac{\widehat{l+5n+2}}{0}\,\neg Ni, \Gamma[i/y]^N.$$

Lemma 6.10 (Einbettung) *Ist ein Satz A in GID_p herleitbar,*

$$\mathsf{GID}_p \vdash A,$$

so existiert ein l mit

$$k\,|\!\frac{\widehat{l+\iota}}{l}\,A^N.$$

Beweis
Da A in GID_p herleitbar ist, existieren Axiome $A_1, \ldots, A_n$ aus GID_p mit

$$\vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n), A.$$

Da A ein Satz ist, können wir möglicherweise vorhandene freie Variablen in $A_1, \ldots, A_n$ beliebig mit Numeralen belegen. Nach Lemma 6.9 existiert ein l_1 derart, daß

$$(1) \qquad k\,|\!\frac{\widehat{l_1}}{0}\,\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)^N, A^N$$

gilt, und wegen Lemma 6.6 gibt es ein l_2 mit

(2) $$k \overset{\widehat{l_2}+\iota}{\underset{0}{\vdash}} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)^N.$$

Sei l größer als l_1 und l_2 und größer als die Länge der Formel $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$. Dann folgt aus (1) und (2) mit einem (cut)

$$k \overset{\widehat{l}+\iota}{\underset{l}{\vdash}} A^N.$$

7 Eine Majorisierung der Π^0_2-Skolem-Funktionen von GID_p

7.1 Wiedersehen mit den Ordinalzahlen

Lemma 7.1

(a) $\alpha_0 =_{CNF} \gamma_0 + \ldots + \gamma_m \;\&\; \alpha_0 \ll_k \alpha \in AH \implies \forall i \leq m(\gamma_i \ll_k \alpha)$

(b) $\alpha_0 \ll_k \alpha \in AH \implies \alpha_0 \ll_k D_p\alpha$

(c) $l < m \implies D^l_p(D^l_p 0 + \iota) \ll^{(m-l)}_k D^m_p(D^m_p 0 + \iota)$

(d) $\alpha_0 \ll_k \alpha \;\&\; \alpha_0, \alpha \in AH \implies \alpha_0 \# \alpha_0 \ll_k D_p\alpha$

(e) $D^l_p(D^l_p 0 + \iota) \# D^l_p(D^l_p 0 + \iota) \ll_k D^{l+1}_p(D^{l+1}_p 0 + \iota)$

Beweis
(a) Es gilt $\forall i \leq m(\gamma_i <_k \alpha)$. Da für alle $i \leq m$ zum einen $AH_l\gamma_i \subseteq AH_l\alpha_0$ und zum anderen $no(\gamma_i) \leq no(\alpha_0)$ gilt, folgt die Behauptung.
(b) Wir zeigen zunächst $\alpha_0 \ll_k \alpha \implies \alpha_0 <_k D_p\alpha$ durch Induktion nach α_0. Gilt $\alpha_0 = 0$, so ist die Behauptung klar. Sei $\alpha_0 = D_v\gamma$. Für $v < p$ benutzen wir die Stufenklausel. Sei also $v = p$. Wegen $\alpha_0 \ll_k \alpha$ haben wir $\{\alpha_0\} = AH_p\alpha_0 \leq_k AH_p\alpha$. Aus der Teiltermklausel folgt damit $\alpha_0 <_k D_p\alpha$. Sei $\alpha_0 =_{CNF} \gamma_0 + \ldots + \gamma_m$. In (a) zeigten wir $\gamma_i \ll_k \alpha$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $\gamma_i <_k D_p\alpha$. Dann folgt $\alpha_0 <_k D_p\alpha$ mit der Klausel der additiven Hauptzahl$_2$.
Da für $l < p$ trivialerweise $AH_l D_p\alpha = AH_l\alpha$ gilt, ist nur noch

$$AH_p\alpha_0 \leq_k \{D_p\alpha\} = AH_p D_p\alpha$$

zu zeigen. Sei $\gamma \in AH_p\alpha_0$. Wegen $\alpha_0 \ll_k \alpha$ gilt dann $\gamma \leq_k AH_p\alpha$. Da γ eine additive Hauptzahl ist, folgt mit der Stufen- oder mit der Teiltermklausel $\gamma <_k D_p\alpha$.
Nach Voraussetzung gilt $no(\alpha_0) < q(no(\alpha), k)$ und wegen der strengen Monotonie von q auch $no(\alpha_0) < q(no(D_p\alpha), k)$.

(c) Wir benutzen zunächst Lemmata 2.16 und 2.12. Mit $D_p^l 0 \ll_k D_p^{l+1} 0$ gilt auch $D_p^l 0{+}\iota \ll_k D_p^{l+1} 0{+}\iota$. Hieraus folgt $D_p^l(D_p^l 0{+}\iota) \ll_k D_p^l(D_p^{l+1} 0{+}\iota)$. Mit Punkt (b) des Lemmas, das wir gerade beweisen, ergibt sich $D_p^l(D_p^l 0{+}\iota) \ll_k D_p^{l+1}(D_p^{l+1} 0{+}\iota)$ und somit im wesentlichen das zu zeigende.
(d) Mit Lemma 2.2(c) können wir wie im Beweis von 2.15 die hier geforderte Normbedingung

$$no(\alpha_0 \# \alpha_0) < q(no(D_p\alpha), k)$$

zeigen. Die Additive-Hauptzahl$_2$-Klausel liefert uns mit Teil (b) $\alpha_0 \# \alpha_0 <_k D_p\alpha$. Für $l < p$ ist wegen $\alpha_0 \ll_k \alpha$ desweiteren $AH_l D_p\alpha = AH_l\alpha$. Außerdem gilt auch, da $\alpha_0 \in AH$ ist, $AH_p(\alpha_0 \# \alpha_0) = \{\alpha_0\} \leq_k \{D_p\alpha\} = AH_p D_p\alpha$.
(e) Wie im Beweis von (c) zeigen wir $D_p^l(D_p^l 0 + \iota) \ll_k D_p^l(D_p^{l+1} 0 + \iota)$. Teil (d) dieses Lemmas führt uns zur Behauptung.

Lemma 7.2 *Sei* $l > 0$.

(a) $\quad 5 \cdot l + 4 < q(no(D_p^{l-1}(D_p^{l-1} 0 + \iota)), k)$

(b) $\quad 5 \cdot k + 4 < q(no(D_p^l(D_p^l 0 + \iota)), k)$

Beweis
Die Norm von $D_p^l(D_p^l 0 + \iota)$ errechnet sich leicht zu

$$no(D_p^l(D_p^l 0 + \iota)) = 2 \cdot l + p.$$

Nehmen wir die primitiv rekursive Funktion aus Kapitel 2,

$$q(m, k) = p \cdot (k + 1) \cdot 5^{m+2},$$

so folgen die Behauptungen (a) und (b) mit einfachster Arithmetik. Wir nutzen dabei $p > 0$ und $k + 1 > 0$ sowie $5 \cdot l + 4 < 5^{2 \cdot l+1}$. Zum einen gilt

$$\begin{aligned} 5 \cdot l + 4 &< 5^{2 \cdot l+1} \\ &\leq p \cdot (k + 1) \cdot 5^{2 \cdot (l-1)+p+2}, \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} 5 \cdot k + 4 &< (k + 1) \cdot 5 \\ &\leq p \cdot (k + 1) \cdot 5^{2 \cdot l+p+2}, \end{aligned}$$

womit (a) und (b) nachgerechnet sind.

Lemma 7.3 *Sei $\alpha \geq \Omega_p$. Dann gilt:*

$$k\,\vert\!\frac{q(no(\alpha),k)}{0}\,\Gamma \implies k\,\vert\!\frac{\alpha+1}{0}\,\Gamma$$

Beweis
Es genügt,

$$q(no(\alpha), k) \ll_k \alpha + 1$$

zu zeigen. Die Behauptung folgt dann mit ($\ll_k$). Da $\alpha \geq \Omega_p$ ist, gilt mit der Stufenklausel

$$1 <_k \alpha,$$

also mit der Additive-Hauptzahl$_2$-Klausel

$$q(no(\alpha), k) - 1 <_k \alpha$$

und mit Multimengenvergleich

$$q(no(\alpha), k) <_k \alpha + 1.$$

Ferner gilt $AH_l q(no(\alpha), k) = \{1\} \leq_k AH_l\alpha \cup AH_l 1$. Somit folgt, da trivialerweise die Normbedingung gilt,

$$q(no(\alpha), k) \ll_k \alpha + 1.$$

Lemma 7.4

(a) $\quad m > 0 \implies k\,\vert\!\frac{D_p^{m-1}(D_p^{m-1}0+\iota)+1}{0}\,Nm$

(b) $\quad m\,\vert\!\frac{D_p^{l}(D_p^{l}0+\iota)+1}{0}\,Nm$

Beweis
(a) Nach Lemma 6.7(a) gilt

$$k\,\vert\!\frac{5m+4}{0}\,Nm.$$

Nach Lemmata 7.2(a) und 2.25(b) folgt mit ($\ll_k$)

$$k\,\vert\!\frac{q(no(D_p^{m-1}(D_p^{m-1}0+\iota)),k)}{0}\,Nm$$

und wegen Lemma 7.3 auch

$$k\,\vert\!\frac{D_p^{m-1}(D_p^{m-1}0+\iota)+1}{0}\,Nm.$$

(b) Nach Lemma 6.7(a) gilt

$$k\,\vdash_0^{5m+4} Nm$$

für alle k, insbesondere also auch

$$m\,\vdash_0^{5m+4} Nm.$$

Nach Lemmata 7.2(b) und 2.25(b) folgt mit ($\ll_k$)

$$m\,\vdash_0^{q(no(D_p^l(D_p^l 0+\iota)),m)} Nm$$

und wegen Lemma 7.3 auch

$$m\,\vdash_0^{D_p^l(D_p^l 0+\iota)+1} Nm.$$

7.2 Wahrheit

Sei Γ eine Teilmenge von Pos_0. Damit besteht Γ nach Definition von Pos_0 ausschließlich aus $\mathcal{L}(N)$-Formeln, in denen N, wenn überhaupt, nur positiv auftritt. Es gibt also in den Formeln von Γ keine Teilformeln der Gestalt $\neg Nt$. Wir schreiben $\models \Gamma(j)$, wenn die Disjunktion der Formeln aus Γ im Standardmodell gilt, wobei das Prädikatszeichen N durch die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als j sind, interpretiert wird.

Lemma 7.5 (Wahrheit)

$$k\,\vdash_0^{j} \Gamma \;\;\&\;\; \Gamma \subseteq Pos_0 \;\Longrightarrow\; \models \Gamma(j)$$

Beweis durch Induktion nach j
(Ax1). Enthält Γ eine wahre Primformel, also eine Formel, die im Standardmodell wahr ist, so gilt auch $\models \Gamma(j)$ für ein beliebiges j. Wegen $\Gamma \subseteq Pos_0$ kann der Fall $\neg P^{\mathfrak{A}}_{<v} jn \in \Gamma$ nicht eintreten.
(Ax2). Da $\Gamma \subseteq Pos_0$ ist, kann (Ax2) nicht vorliegen.
(Bas). Wegen $\Gamma \subseteq Pos_0$ können ($P^{\mathfrak{A}}_{<}$) und ($\neg P^{\mathfrak{A}}_{<}$) nicht auftreten. Von den anderen Fällen zeigen wir ($\exists$), die nicht gezeigten verlaufen analog. Wir benutzen jeweils die Korrektheit der Grundschlüsse. Sei $i \ll_k j$ mit $k\,\vdash_0^{i} \Gamma, A_x(n)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\models \Gamma \cup \{A_x(n)\}(i)$. Aus $\models \{A_x(n)\}(i)$ folgt $\models \{\exists x A\}(i)$. Also ergibt sich in jedem Fall $\models \Gamma(i)$. Da N in Γ nur positiv auftreten darf, folgt $\models \Gamma(j)$ wegen $i < j$.

(Ind). Da $\Gamma \subseteq Pos_0$ ist, kann nicht $(P_v^{\mathfrak{A}})$ vorliegen. Wir betrachten also (N). Sei $i \ll_k j$, insbesondere also $i < j$. Da mit $\models \{n = 0 \vee (n = \mathrm{S}m \wedge Nm)\}(i)$ schon $\models \{Nn\}(j)$ gilt, folgt die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung.
(Cut). Ein Schnitt kann aufgrund des überaus kleinen Schnittranges nicht vorliegen.
(Ω_{u+1}). Da j eine natürliche Zahl ist, gibt es keinen Kontext f derart, daß $j = f[\Omega_{u+1}]$ ist. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.
$(\ll_k)$. Sei $i \ll_k j$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\models \Gamma(i)$. Da N in Γ nur positiv auftreten darf, folgt $\models \Gamma(j)$ wegen $i < j$.

Theorem 7.6 *Sei der Π_2^0-Satz $\forall x \exists y \Phi(x, y)$ in GID_p herleitbar. Dann gilt im Standardmodell:*

(a) $\quad \exists l \forall m > l \exists n < G_0(D_0(D_p^m(D_p^m 0 + \iota) + 1))\ \Phi(m, n)$

(b) $\quad \exists l \forall m \exists n < G_m(D_0(D_p^l(D_p^l 0 + \iota) + 1))\ \Phi(m, n)$

Beweis
Laut Einbettungslemma 6.10 existiert ein l_0 derart, daß für alle k

$$k \overset{D_p^{l_0} 0 + \iota}{\underset{l_0}{\vdash}} \forall x(Nx \to \exists y(Ny \wedge \Phi(x, y)^N))$$

gilt. Das Inversionslemma 5.2 löst den Allquantor auf. Also gilt für alle m und alle k

$$k \overset{D_p^{l_0} 0 + \iota}{\underset{l_0}{\vdash}} Nm \to \exists y(Ny \wedge \Phi(m, y)^N)$$

und es folgt durch $\vee$-Inversion

$$k \overset{D_p^{l_0} 0 + \iota}{\underset{l_0}{\vdash}} \neg Nm, \exists y(Ny \wedge \Phi(m, y)^N).$$

Durch l_0-faches Anwenden des Eliminationslemmas ist die Herleitung schnittfrei,

(1) $\quad k \overset{D_p^{l_0}(D_p^{l_0} 0 + \iota)}{\underset{0}{\vdash}} \neg Nm, \exists y(Ny \wedge \Phi(m, y)^N).$

Um sich nun der Formel $\neg Nm$ zu entledigen, gibt es zwei Möglichkeiten:
(a) Sei $l := l_0$. Nach Lemma 7.4(a) gilt

(2) $\quad 0 \overset{D_p^{m-1}(D_p^{m-1} 0 + \iota) + 1}{\underset{0}{\vdash}} Nm,$

und für alle $m > l$ nach (1), gegebenenfalls nach Anwendung des Lemmas 7.1(c) und ($\ll_k$), auch

$$0 \,\Big|\!\frac{D_p^{m-1}(D_p^{m-1}0+\iota)}{0}\, \neg Nm, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N).$$

Mit dem Reduktionslemma und Lemma 7.1(e) erhalten wir dann zusammen mit (2) und ($\ll_k$) für alle $m > l$

$$0 \,\Big|\!\frac{D_p^{m}(D_p^{m}0+\iota)+1}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N).$$

Da $\exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N)$ ein Formel aus Pos_0 ist, folgt mit dem Kollabierungslemma (a) für alle $m > l$

$$0 \,\Big|\!\frac{D_0(D_p^{m}(D_p^{m}0+\iota)+1)}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N)$$

und dann mit Kollabierungslemma (b) für alle $m > l$

$$0 \,\Big|\!\frac{G_0(D_0(D_p^{m}(D_p^{m}0+\iota)+1))}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N).$$

Da die hergeleitete Formel in Pos_0 ist, liefert das Wahrheitslemma die Behauptung.
(b) Nach Lemma 7.4(b) gilt

$$m \,\Big|\!\frac{D_p^{l_0}(D_p^{l_0}0+\iota)+1}{0}\, Nm.$$

Sei $l := l_0 + 1$. Mit dem Reduktionslemma und Lemma 7.1(e) folgt zusammen mit (1) und ($\ll_k$)

$$m \,\Big|\!\frac{D_p^{l}(D_p^{l}0+\iota)+1}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N).$$

Teil (a) des Kollabierungslemmas liefert, da $\exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N)$ eine Formel aus Pos_0 ist,

$$m \,\Big|\!\frac{D_0(D_p^{l}(D_p^{l}0+\iota)+1)}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N)$$

und Teil (b) des Kollabierungslemmas

$$m \,\Big|\!\frac{G_m(D_0(D_p^{l}(D_p^{l}0+\iota)+1))}{0}\, \exists y(Ny \wedge \Phi(m,y)^N).$$

Da die hergeleitete Formel in Pos_0 ist, erringt das Wahrheitslemma die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] Toshiyasu Arai. Variations on a theme by Weiermann. *Journal of Symbolic Logic*, Preprint.

[2] Toshiyasu Arai. A slow growing analogue to Buchholz' proof. *Annals of Pure and Applied Logic*, 54:101–120, 1991.

[3] Wilfried Buchholz. An independence result for Π^1_1-CA + BI. *Annals of Pure and Applied Logic*, 33:131–155, 1987.

[4] Wilfried Buchholz. Proof–theoretic analysis of termination proofs. *Annals of Pure and Applied Logic*, 75:57–66, 1995.

[5] Wilfried Buchholz, Solomon Feferman, Wolfram Pohlers und Wilfried Sieg, Herausgeber. *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies.* Nummer 897 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg/New York, 1981.

[6] Wilfried Buchholz und Kurt Schütte. *Proof Theory of Impredicative Subsystems of Analysis.* Nummer 2 in Studies in Proof Theory, Monographs. Bibliopolis, Neapel, 1988.

[7] Wolfram Pohlers. *Proof Theory. An Introduction.* Nummer 1407 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1989.

[8] Wolfram Pohlers. A short course in ordinal analysis. In Peter Aczel, Harold Simmons und Stanley S. Wainer, Herausgeber, *Proof Theory*, pp. 27–78. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[9] Andreas Weiermann. Bounding derivation lengths with functions form the slow growing hierarchy, Preprint.

[10] Andreas Weiermann. How to characterize provably total functions by local predicativity. *Journal of Symbolic Logic*, 61:52–69, 1996.